R S A Y
érie A

THESES

PRESENTEES

A L ' UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D ' ORSAY

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Moustafa DAMLAKHI

# # #

1ere THESE REGULARITE DES SOLUTIONS DE CERTAINES CLASSES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

2eme THESE PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

# # #

Soutenues le 28 Juin 1982 devant la Commission d'Examen

MM.	J.M. BONY	Président
	S. ALINHAC	Examinateurs
	M.S. BAOUENDI	
	C. GOULAOUIC	
	G. METIVIER	
	R. TEMAM	

THESES

PRESENTEES

A L ' UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D ' ORSAY

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Moustafa DAMLAKHI

\# \# \#

1ere THESE REGULARITE DES SOLUTIONS DE CERTAINES CLASSES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

2eme THESE PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

\# \# \#

Soutenues le 28 Juin 1982 devant la Commission d'Examen

MM.	J.M. BONY	Président
	S. ALINHAC	Examinateurs
	M.S. BAOUENDI	
	C. GOULAOUIC	
	G. METIVIER	
	R. TEMAM	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

C'est à Monsieur Charles Goulaouic que je dois mon initiation à la recherche en mathématiques, il m'a accueilli dans son équipe et m'a prodigué dès le début les encouragements nécessaires à la poursuite de mon travail.

Je tiens à remercier B. Helffer et C. Zuily, pour leurs nombreuses discussions et en collaboration avec eux, une partie de cette thèse a été écrite.

Je remercie vivement J. M. Bony pour ses nombreux conseils et pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je voudrais aussi remercier M. S. Baouendi et G. Métivier d'avoir bien voulu participer au jury. Je remercie également R. Temam, qui m'a proposé un sujet de seconde thèse passionnant. Je remercie aussi M. Sermange et B. Heron pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux pendant la préparation de la seconde thèse.

Comment ne pas remercier tous ceux qui, autour de moi, tant au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique qu'au sein de l'équipe "Equations aux Dérivées Partielles" d'Orsay ; je pense en particulier à J. M. Bony, S. Alinhac, J. Sjostrand et C. Zuily.

Je tiens à remercier l'Ecole Polytechnique et la Fondation de France de m'avoir accordé une bourse dans des moments difficiles.

Je remercie le personnel de la bibliothèque de mathématiques qui m'a facilité mon travail. Sans l'effort du secrétariat de l'Ecole, cette thèse n'aurait pas vu le jour. Je voudrais ici remercier tout le monde et plus particulièrement Michèle Lavallette. Dominique Concha en a assuré le tirage et je voudrais aussi le féliciter pour son soin et sa diligence .

Aux moments de satisfaction succèdent bien souvent dans la recherche les longues périodes de doute, où l'on est là, tout en étant bien souvent ailleurs, je voudrais tant que Hiam me pardonne ces moments-là. Sans le climat dont elle a su m'entourer et la patience dont elle a constamment fait preuve, ce travail aurait-il pu être mené à bien ?

Les principaux résultats de la thèse sont répartis en trois chapitres :

I . De nouvelles caractérisations des fonctions analytiques réelles.

a) Analyticité et itérés de champs de vecteurs et d'opérateurs pseudo-différentiels.

b) Analyticité et itérés d'un système de champs non elliptique.

II. L'unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels.

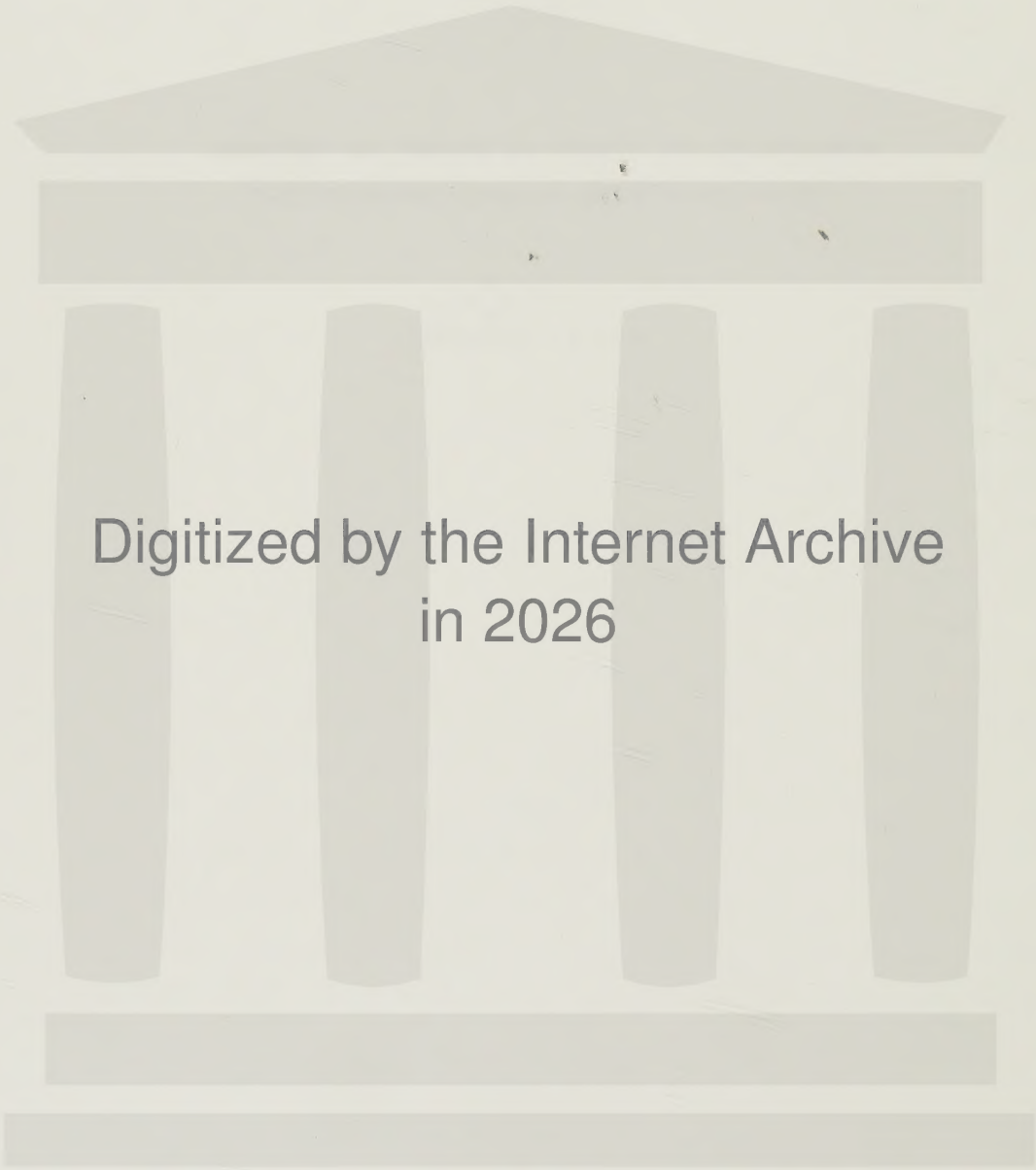
III. Solutions höldériennes pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés.

Nous présentons une introduction au début de chaque partie

*
* *

ANALYTICITE ET ITERES DE CHAMPS DE VECTEURS ET D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par M. DAMLAKHI


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543522_0031

I N T R O D U C T I O N

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On sait que l'analyticité d'une fonction u de classe C^∞ sur ω, est caractérisée par la propriété suivante :

H_0

Pour tout compact K de ω, il existe une constante $C = C_K > 0$ telle que l'on ait pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$(0\text{-}1) \qquad \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|!$$

Cette caractérisation reste valable dans le cas où ω est remplacé par une variété analytique réelle compacte sans bord Γ et (0-1) est remplacée par des inégalités analogues où les D_{x_j} sont remplacés par un système elliptique de champs de vecteurs analytiques.

Le but de ce travail est d'obtenir une nouvelle caractérisation de fonctions analytiques, définies sur ω (ou Γ).

Au chapitre I, on s'intéresse au cas où :

$\Gamma = \Pi^n$, où Π est un cercle unité, et à l'aide des séries de Fourier, on démontre la

Proposition : Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\Gamma = \Pi^n$, vérifiant l'hypothèse suivante :

H_1

Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(0\text{-}3) \qquad \|D^k_{\theta_i} u(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)\|_{L^2(\Gamma)} \leq L^{k+1} k !$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$;

alors u est analytique dans Γ.

On considère ensuite le cas de l'ouvert $\omega = (\,]-1, +1[\,)^n$, et on a le résultat suivant :

THEOREME I : Si u est une fonction de classe C^∞ sur le pavé $\overline{\omega}$, vérifiant l'hypothèse suivante :

H_2 | Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$:

(0-4) $$\| D^k_{x_i} u(x_1,\ldots,x_n) \|_{L^2(\omega)} \leq L^{k+1}\, k\ !$$

Alors, u est analytique sur $\overline{\omega}$.

On obtient ainsi une nouvelle caractérisation des fonctions analytiques définies sur $\overline{\omega}$. La démonstration de ce théorème utilise les résultats de [2] sur la théorie spectrale de l'opérateur de Legendre à n-dimensions.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des champs de vecteurs réels, à coefficients analytiques, et linéairement indépendants en tout point de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Pour $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$ avec $\alpha_\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$, on note $|\alpha| = \ell$, $x^\alpha = x_{\alpha_1} \circ x_{\alpha_2} \circ \ldots \circ x_{\alpha_\ell}$.

En 1959, E. NELSON [12] a démontré que :

Le fait qu'une fonction u de classe C^∞ sur Ω, vérifie l'hypothèse suivante :

H_3 | Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C = C_K$ telle que l'on ait pour tout $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$

(0-5) $$\| x^\alpha u \|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+1}\, |\alpha|\ !$$

implique que u est analytique dans Ω.

Dans le chapitre II, on démontre le résultat suivant :

THEOREME II : Pour que la fonction u soit analytique dans Ω, il suffit de supposer qu'elle vérifie l'hypothèse suivante :

H_4 | Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C = C_K$, telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1,\ldots n$

(0-6) $$\| x_i^k u \|_{L^2(K)} \leq C^{k+1}\ k\ !$$

Nous utiliserons à cet effet, la notion de spectre singulier analytique d'une hyperfonction et le théorème fondamental de SATO ([6] , [13]), ainsi une idée de [11] consistant à rajouter une variable supplémentaire t ($t\in\mathbb{R}$), et à considérer les opérateurs $p_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} - i\, x_\gamma$ avec $\gamma = 1,\ldots,n$.

D'autre part, soit P un opérateur différentiel d'ordre $m\in\mathbb{N}$, elliptique, à coefficients analytiques, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. En 1962, T. KOTAKE et N. NARASIMHAN ont démontré que :

H_5 | Si u est une fonction de classe C^∞ sur Ω vérifiant : Pour tout compact K de Ω , il existe une constante $C = C_K > 0$, telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$

(0-7) $$\| P^k u\|_{L^2(K)} \leq C^{k+1}\,(mk)\,!$$

Alors u est analytique dans Ω .

Le chapitre III est consacré à une extension de ce résultat au cas des opérateurs pseudo-différentiels analytiques, elliptiques définis (au sens de [7]), dans le cas où on a une variété analytique réelle, compacte, sans bord, de dimension n et on démontre le résultat suivant :

THEOREME III : Soit $p = p(x, D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre $m\in\mathbb{N}$, elliptique défini sur Γ (au sens de [7]) à symbole principal réel.

On considère une fonction u de classe C^∞ sur Γ vérifiant l'hypothèse suivante :

H_6 | Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$

(0-8) $$\| P^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leq L^{mk+1}\,(mk)\,!$$

Alors u est analytique dans Γ .

On se sert, pour celà, de l'idée déjà utilisée au chapitre II, consistant à rajouter une variable supplémentaire t($t\in\mathbb{R}$) et, par les cartes locales, on se ramène à considérer l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial t})^m - Q$ si m est impair, et $(\frac{\partial}{\partial t})^m - i\,Q$ si m est pair, où Q est un opérateur pseudo-différentiel analytique, d'ordre m , elliptique, défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, dont le

symbole principal est réel. Le résultat découle alors du théorème des régularités analytiques des solutions des équations pseudo-différentielles elliptiques (théorème fondamental de SATO [6]).

CHAPITRE I

I - FONCTIONS ANALYTIQUES ET FONCTION DE GEVREY

On utilise les notations usuelles : pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un multi-indice de $\mathbb{N}^n$, $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$. Pour α et β dans $\mathbb{N}^n$, on note $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si l'on a $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors on note aussi

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots\dots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \quad \text{où} \quad \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!} \ .$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et un nombre réel $s \geqslant 1$. On appelle espace de Gevrey d'ordre s sur Ω, noté $G_s(\Omega)$, l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur Ω telles que, pour tout compact K de Ω il existe une constante $L > 0$, vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\| D^\alpha u \|_{L^2(K)} \leqslant L^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s \ . \tag{1-1-1}$$

Il est bien clair que pour $s = 1$, $G_1(\Omega)$ est l'espace de fonctions analytiques sur Ω, noté aussi $A(\Omega)$.

On note aussi $G_s(\bar{\Omega})$ (resp $A(\bar{\Omega})$), l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ de fonctions de Gevrey d'ordre s (resp analytiques) dans un voisinage de $\bar{\Omega}$.

On remarque que dans (1-1-1), la norme $L^2(K)$ peut être remplacée par $L^\infty(K)$ et $\alpha!$ par $|\alpha|!$. Par ailleurs, pour un ouvert Ω assez régulier et borné on caractérise $G_s(\bar{\Omega})$ par (1-1-1) avec $K = \bar{\Omega}$. On sera toujours dans une telle situation.

II - PRELIMINAIRES

Proposition (1-2-1)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et Q un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients dans $G_s(\bar{\Omega})$, avec $s \geqslant 1$. Pour tout $u \in G_s(\bar{\Omega})$, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$

(1-2-1) $$\|Q^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{i+1} ((2i)!)^s \quad .$$

Démonstration

L'idée consiste à démontrer par recurrence sur $i \in \mathbb{N}$, qu'il existe deux constantes L_1 et L_2 telles que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$

(1-2-2) $$\|D^\alpha Q^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq L_1^{|\alpha|}! \, L_2^{i+1} \, ((|\alpha| + 2i)!)^s \quad .$$

(1-2-2) est vraie pour $i = 0$, car $u \in G_s(\bar{\Omega})$. On déduit la proposition 1-2-1, en faisant $\alpha = 0$ dans (1-2-2).

Corollaire (1-2-1) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Q un opérateur d'ordre 2 à coefficients dans $G_s(\Omega)$, pour $s \geq 1$ et $u \in G_s(\Omega)$. Alors, pour tout compact K de Ω, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$

(1-2-3) $$\|Q^i u\|_{L^2(K)} \leq L^{i+1} ((2i)!)^s \quad .$$

La réciproque de ce corollaire est évidemment fausse, pour un opérateur Q quelconque, mais vraie pour un opérateur elliptique.

Donc on a une caractérisation de fonctions de Gevrey, d'ordre $s \geq 1$ définies sur un ouvert Ω de R^n, donnée par le théorème suivant :

Théorème 1-2-1 :

Soit Q un opérateur différentiel d'ordre 2, elliptique à coefficients dans $G_s(\Omega)$, avec $s \geq 1$. Soit u une fonction C^∞ dans Ω. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in G_s(\Omega)$

(ii) pour tout compact K de Ω, il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$

(1-2-4) $$\|Q^i u\|_{L^2(K)} < L^{i+1} ((2i)!)^s$$

Démonstration

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la proposition (1-2-1). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est démontrée dans [10], dans le cas où $s = 1$, et pour le

cas général $s \geqslant 1$, il suffit de démontrer qu'il existe deux constantes L_1 et L_2 convenables, telles que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\|D^\alpha Q^i u\|_{L^2(K)} \leqslant L_1^{i+1} \cdot L_2^{|\alpha|} ((|\alpha| + 2i)!)^s \tag{1-2-5}$$

Nous renvoyons à [4] pour la démonstration de cette estimation. Donc, dans le cas où $s = 1$, on obtient une caractérisation de fonctions analytiques définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à l'aide d'un opérateur différentiel elliptique.

THEOREME 1-2-2 - T. KOTAKE, N. NARASIMHAN [10] :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, A un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$, elliptique à coefficients analytiques dans Ω, et une fonction u de classe C^∞ sur Ω, vérifiant l'hypothèse suivante :

Il existe une constante C positive, telle que l'on ait pour tout $K \in \mathbb{N}$

$$\|A^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C^{k+1} (m\,k)! \tag{1-2-6}$$

où C ne dépend pas de k.

Alors u est analytique dans Ω .

On verra plus tard que ce théorème est vrai aussi, quand on remplace A par un opérateur pseudo-différentiel analytique au sens de [7], elliptique sur une variété analytique réelle, compacte, sans bord.

III - CARACTERISATION DE FONCTIONS ANALYTIQUES définies

a) sur $\Gamma = \mathbb{T}^n$, où $\mathbb{T}$ est un cercle unité

b) sur $\overline{\omega}$, où $\omega = (]-1, +1[)^n$.

Proposition 1-3-1 :

Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\Gamma = \mathbb{T}^n$, où $\mathbb{T}$ est un cercle unité. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est analytique dans Γ.

(ii) Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j = 1,..,n$

$$\|D_{\theta_j}^k u(\theta_1, \ldots, \theta_n)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant L^{k+1} k! \tag{1-3-1}$$

Démonstration :

Il est évident que (i) implique (ii). Pour démontrer l'implication (ii)⇒(i), on démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 1-3-1 :

Pour tout $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in \mathbb{R}^n$, et tout $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha|\neq 0$ on a l'inégalité suivante :

$$\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\leq\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\xi_1^{|\alpha|}+\ldots+\frac{\alpha_n}{|\alpha|}\xi_n^{|\alpha|}. \tag{1-3-2}$$

Démonstration du Lemme :

On sait que, pour tout $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in \mathbb{N}^2$ avec $|\alpha|\neq 0$ et tout $(\xi_1,\xi_2)\in R^2$

$$\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2}\leq\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\xi_1^{|\alpha|}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\xi_2^{|\alpha|}. \tag{1-3-3}$$

Donc, pour démontrer (1-3-2), il suffit de faire une récurrence sur n. Pour celà, on suppose que (1-3-2) soit vraie pour n et on la démontre pour n+1.

Soient $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $|\alpha|\neq 0$ et $(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1})\in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\leq\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\xi_n^{\alpha_n+\alpha_{n+1}}+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\xi_{n+1}^{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\right)$$

et d'après la récurrence, on a :

$$\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\leq\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\xi_1^{|\alpha|}+\ldots+\frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha|}\xi_{n+1}^{|\alpha|}+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{|\alpha|}\xi_n^{|\alpha|}\right)$$

$$+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\xi_1^{|\alpha|}+\ldots+\frac{\alpha_{n-1}}{|\alpha|}\xi_{n-1}^{|\alpha|}+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{|\alpha|}\xi_{n+1}^{|\alpha|}\right)$$

D'où

$$\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\leq\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\xi_1^{|\alpha|}+\ldots+\frac{\alpha_n}{|\alpha|}\xi_n^{|\alpha|}+\frac{\alpha_{n+1}}{|\alpha|}\xi_{n+1}^{|\alpha|}.$$

Ce qui démontre donc (1-3-2).

Maintenant on suppose que (ii) soit vérifiée et on va démontrer que $u\in A(\Gamma)$. Puisque u est périodique dans $\Gamma=\Pi^n$, u peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(\theta) = u(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m \, e^{i(m_1 \theta_1 + \ldots + m_n \theta_n)}$$

où $m = (m_1,\ldots,m_n)$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$, $j = 1, 2,\ldots,n$,

et $$C_m = C_{m_1,\ldots,m_n} = \int_\Gamma u(s_1,..,s_n)\, e^{-i(m_1 s_1 + \ldots m_n s_n)}\, d s_1 \ldots d s_n$$

avec $0 \leqslant s_j \leqslant 2\Pi$ pour tout $j = 1,\ldots,n$.

Mais, puisque le système $\{e^{i m_j \theta_j}\}_{m_j \in \mathbb{Z}}$ est orthogonal dans $L^2(\Pi)$ et en tenant compte de l'inégalité (1-3-1), on a :

$$(1\text{-}3\text{-}4) \qquad (2\Pi)^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |C_m|^2 |m_j|^{2k} \leqslant L^{2(k+1)} \cdot (k!)^2$$

pour tout $j = 1,\ldots,n$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \neq 0$.

$$D^\alpha u = D^{\alpha_1}_{\theta_1} \ldots D^{\alpha_n}_{\theta_n} u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m (i m_1)^{\alpha_1} \ldots (i m_n)^{\alpha_n} e^{i(m_1\theta_1 + \ldots + m_n\theta_n)}$$

$$\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Gamma)} = (2\Pi)^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |C_m|^2 |m_1|^{2\alpha_1} \ldots |m_n|^{2\alpha_n}$$

et, d'après le lemme 1-3-1, on en déduit que :

$$\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant (2\Pi)^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |C_m|^2 \cdot |m_1|^{2|\alpha|} + \ldots + (2\Pi)^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |C_m|^2 \cdot |m_n|^{2|\alpha|}$$

d'après l'inégalité (1-3-4), on a :

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant n\, L^{(|\alpha|+1)} (|\alpha|!)$$

Si on pose $L_1 = \sup(n, L)$ et $L_2 = L^2_1$, on obtient

$$(1\text{-}3\text{-}5) \qquad \|D^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant L_2^{(|\alpha|+1)} (|\alpha|!)$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \neq 0$, où L_2 est une constante qui dépend de n et de Γ.

Ce qui démontre donc que u est analytique dans Γ.

Théorème 1-3-1 :

Soient le pavé $\omega = (]-1, +1[)^n$ de $\mathbb{R}^n$, et une fonction u de classe C^∞ sur $\bar{\omega}$. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est analytique dans $\bar{\omega}$.

(b) Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

(1-3-6) $$\| D^k_{x_i} u \|_{L^2(\omega)} \leqslant L^{k+1} k!, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n$$

Démonstration

Il est facile de vérifier que (a) implique (b). Pour démontrer que (b) implique (a), on va utiliser les résultats de [2] sur la théorie spectrale de l'opération de Legendre à n-dimensions.

On définit donc l'opération de Legendre $\mathcal{L}_i$ sur $I =]-1,+1[$ par :

$$\mathcal{L}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(1 - x^2_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, 2, \ldots, n$$

de domaine :

$$D(\mathcal{L}_i) = \{u \in L^2(\omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\omega) \text{ et } (1-x_i^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\omega)\} .$$

On note P_{m_i} le m_i-ième polynôme de Legendre vérifiant

(1-3-7) $$\mathcal{L}_i P_{m_i}(x_i) = m_i (m_i+1) P_{m_i}(x_i) = \lambda_{m_i} P_{m_i}(x_i)$$

$$\| P_{m_i}(x_i) \|_{L^2(I)} = 1 \quad , \quad \text{pour tout } i = 1,2,\ldots n.$$

Ensuite, on définit l'opérateur :

$$A = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \ldots + \mathcal{L}_n$$

de domaine :

$$D(A) = \bigcap_{i=1}^{n} D(\mathcal{L}_i)$$

et on note

$$P_m(x_1, \ldots x_n) = p_{m_1}(x_1) \ldots p_{m_n}(x_n)$$

Notons enfin que les polynômes $P_m(x_1,\ldots,x_n)$ forment un système orthonormé, total dans $L^2(\omega)$. Ce sont les fonctions propres de l'opérateur A.

(1-3-8)
$$\left|\begin{array}{l} AP_m(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_n})\, P_m(x_1,\ldots,x_n) \\ \\ \|P_m(x_1,\ldots,x_n)\|_{L^2(\omega)} = 1 \quad . \end{array}\right.$$

Lemme 1-3-2 : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité suivante :

(1-3-9)
$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_n})^k \leq 2^{(n-1)k}\, (\lambda^k_{m_1} + \ldots + \lambda^k_{m_n})$$

Démonstration du lemme :

$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j_{m_1}\, \lambda^{k-j}_{m_2}$$

$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2})^k \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda^k_{m_1} + \lambda^k_{m_2})$$

d'où

(1-3-10)
$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2})^k \leq 2^k\, (\lambda^k_{m_1} + \lambda^k_{m_2}) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad .$$

L'inégalité (1-3-9) se démontre par récurrence sur n, et pout $k \in \mathbb{N}^*$, où elle est vraie pour n = 2, d'après (1-3-10). On suppose donc que (1-3-9) est vraie pour n, et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Démontrons la pour (n+1)

$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_n} + \lambda_{m_{n+1}}) \leq 2^k \left[\lambda^k_{m_{n+1}} + (\lambda_{m_1} + \ldots + \lambda_{m_n})^k\right]$$

d'après la récurrence sur n, on obtient

$$(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \ldots + \lambda_{m_n} + \lambda_{m_{n+1}})^k \leq 2^{nk}\, (\lambda^k_{m_1} + \ldots + \lambda^k_{m_n} + \lambda^k_{m_{n+1}}) \; .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ce qui démontre (1-3-9).

Puisque $u \in L^2(\omega)$, donc u peut s'écrire sous la forme suivante :

(1-3-11)
$$u(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n} u_{m_1,\ldots,m_n}\, p_{m_1}(x_1)\ldots p_{m_n}(x_n)$$

où $u_{m_1,\ldots,m_n}$ sont les coefficients de Fourier de u suivant la base

$$\left\{p_{m_1}(x_1)\ldots p_{m_n}(x_n)\right\}_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}}$$

$$A^k u = (\mathcal{L}_1 + \ldots + \mathcal{L}_n)^k u = \sum_{m_1,\ldots,m_n} u_{m_1,\ldots,m_n} (m_1 + \ldots + m_n)^k p_{m_1}(x_1)\ldots p_{m_n}(x_n) .$$

$$\| A^k u\|^2_{L^2(\omega)} = \sum_{m_1,\ldots,m_n} |u_{m_1,\ldots,m_n}|^2 (\lambda_{m_1} + \ldots + \lambda_{m_n})^{2k} .$$

D'après le lemme 1-3-2, on a :

$$\| A^k u\|^2_{L^2(\omega)} \leq \sum_{m_1,\ldots,m_n} |u_{m_1,\ldots,m_n}|^2 \, 2^{2(n-1)k} . (\lambda_{m_1}^k + \ldots + \lambda_{m_n}^k)^2 ,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, On obtient :

$$(1\text{-}3\text{-}12) \qquad \| A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq 2^{(n-1)k} \, \| (\mathcal{L}_1^k + \ldots + \mathcal{L}_n^k) \, u\|_{L^2(\omega)} .$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (b), on en déduit qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(1\text{-}3\text{-}13) \qquad \| \mathcal{L}^k_i \, u\|_{L^2(\omega)} \leq c_1^{2k+1} \, (2k)!$$

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$

et, par conséquent, on a :

$$\| A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq 2^{(n-1)k} \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{L}^k_i \, u\|_{L^2(\omega)}$$

$$\| A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq n \, 2^{(n-1)k} \, c_1^{2k+1} \, (2k)!$$

$$\| A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq 2^{n(2k+1)} \, c_1^{2k+1} \, (2k)!$$

Si on choisit $C = 2^n . C_1$, on obtient :

(1-3-14) $$\|A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq C^{2k+1} (2k!)$$

Ce qui démontre donc que u est analytique dans $\bar{\omega}$, (voir [2]), et le théorème 1-3-1 est complètement démontré.

Proposition (1-3-2) : Soient le pavé $\omega = (]-1,+1[)^n$, a un nombre réel tel que $a < 1$... et

$$\omega_a = \{ x = (x_1,\ldots,x_n) \in \omega ; \ |x_i| < a, \ i = 1,2,\ldots,n\}$$

tel que $\bar{\omega}_a \subset \omega$.

Soient s un nombre réel $\geqslant 1$ et u une fonction de classe C^∞ sur ω. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in G_s(\omega)$

(ii) Pour tout ω_a de ω tel que $\bar{\omega}_a \subset \omega$, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

(1-3-15) $$\| D^k_{x_j} u \|_{L^2(\omega_a)} \leqslant L^{k+1} (k!)^s, \quad \text{pour tout } j = 1,\ldots,n$$

Démonstration :

Il est clair que (i) implique (ii). Supposons maintenant que (ii) soit vérifiée, et on va démontrer que $u \in G_s(\omega)$. Pour celà, on définit l'opérateur de Legendre B_j sur $I_a =]-a, a[$, par :

$$B_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (a^2 - x_j^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{avec} \quad j = 1,..,n$$

de domaine

$$D(B_j) = \left\{ u \in L^2(\omega_a) \mid \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\omega_a) \text{ et } (a^2 - x_j^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \in L^2(\omega_a) \right\}$$

$$B = B_1 + \ldots + B_n \quad \text{sur} \quad \omega_a = (]-a, a[)^n$$

de domaine

$$D(B) = \bigcap_{j=1}^{n} D(B_j) \ .$$

Notons que :

$$q_m(x_1,\ldots,x_n) = q_{m_1}(x_1) \ldots q_{m_n}(x_n)$$

où $q_{m_j}(x_j)$ est le m_j-ième polynôme de Legendre vérifiant :

$$(1\text{-}3\text{-}16)\qquad \left|\begin{array}{l} B_j\, q_{m_j}(x_j) = m_j(m_j+1)\, q_{m_j}(x_j) = \mu_{m_j} q_{m_j}(x_j) \\ \| q_{m_j}(x_j)\|_{L^2(I_a)} = 1 \end{array}\right.$$

pour tout $j = 1,2,\ldots,n$, où $I_a =]-a, a[$. Les $(q_m(x_1,\ldots,x_n))_{m\in\mathbb{N}^n}$ forment un système orthonormé, total dans $L^2(\omega_a)$, ce sont les fonctions propres de l'opérateur B.

$$(1\text{-}3\text{-}17)\qquad \left|\begin{array}{l} B\, q_m(x_1,\ldots,x_n) = (\mu_{m_1}+\ldots+\mu_{m_n})\, q_m(x_1,\ldots,x_n) \\ \| q_m(x_1,\ldots,x_n)\|_{L^2(\omega_a)} = 1 \ , \end{array}\right.$$

et comme $u\in L^2(\omega_a)$, u peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} b_{m_1,\ldots,m_n}\, q_{m_1}(x_1),\ldots q_{m_n}(x_n)$$

où $b_{m_1,\ldots,m_n}$ sont les coefficients de Fourier de u suivant la base

$$\left\{q_{m_1}(x_1)\ldots q_{m_n}(x_n)\right\}_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} .$$

D'une part, on a déjà vu que : pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$(1\text{-}3\text{-}18)\qquad \|B^k u\|_{L^2(\omega_a)} \leq 2^{(n-1)k} \left\| \sum_{j=1}^{n} B_j^k u\right\|_{L^2(\omega_a)}$$

et d'autre part, on déduit, d'après l'hypothèse (ii), qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$(1\text{-}3\text{-}19)\qquad \|B_j^k u\|_{L^2(\omega_a)} \leq C_2^{2k+1}\, ((2k!))^s$$

pour tout $j = 1,2,\ldots,n$.

Par conséquent, il existe une constante $M_1 > 0$, telle que l'on ait pour tout $k\in\mathbb{N}$

(1-3-20) $$\|B^k u\|_{L^2(\omega_a)} \leq M_1^{2k+1} (2k!))^s$$

où M_1 dépend de ω_a et de n.

Comme B est un opérateur différentiel d'ordre 2, elliptique dans ω_a, à coefficients dans $G_s(\omega_a)$, il en résulte d'après le théorème (1-2-1) que $u \in G_s(\omega)$.

CHAPITRE II

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le théorème II, en utilisant essentiellement les notions du spectre singulier d'une hyperfonction et le théorème fondamental de M. SATO (voir [6], [13] .

On utilisera quelques résultats de M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC qui sont énoncés dans [3] et seront rappelés dans les préliminaires. Pour démontrer la réciproque du théorème II, ils seront utilisés aussi dans l'extension du théorème de T. KOTAKE et N. NARASIMHAN [10] .

I - PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

Soient Γ une variété analytique, réelle, compacte, de dimension n , sans bord et $x_1,\dots,x_r$ des champs de vecteurs réels analytiques sur Γ qui engendrent l'espace tangent en chaque point de Γ . L'existence de tels champs résulte du plongement analytique de Γ dans un espace $\mathbb{R}^r$.

On note $\mathcal{J} = \{\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_\ell),\ |\alpha| = \ell\ ,\ \alpha_j \in \{1,\dots,r\}\}$

et pour $\alpha \in \mathcal{J}$, on pose :

$$x^\alpha = x_{\alpha_1} \circ \dots \circ x_{\alpha_\ell}$$

$A(\Gamma)$ désigne l'espace de fonctions analytiques définies sur Γ .

On se donne une mesure de Lebesgue μ sur Γ , avec une densité analytique : $L^2(\Gamma)$ est l'espace de fonctions carrés intégrables par rapport à μ .

Pour $s > 0$, on pose

$$(2\text{-}1\text{-}1) \qquad E_s = \left\{ u \in C^\infty(\Gamma) \ ;\ \|u\|_s = \sup_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{\|x^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)}\, s^{|\alpha|}}{|\alpha|\ !} < +\infty \right\}$$

Les espaces E_s , munis de la norme $\|.\|_s$ constituent une chaîne décroissante d'espaces de Banach et on a :

Proposition 2--1 :

$$A(\Gamma) = \bigcup_{s>0} E_s \quad .$$

Démonstration : Soit Q l'opérateur elliptique sur Γ, défini par

$$Q = \sum_{j=1}^{v} x_j^2$$

soit $u \in E_s$, alors $Q^k u$ est la somme de r^k termes de la forme $x^\alpha u$ avec $\alpha \in \mathcal{J}$ et $|\alpha| = 2k$. Il résulte de (2-1-1) que :

$$\|Q^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u\|_s \cdot r^k (2k)! \; s^{-2k} \qquad (2\text{-}1\text{-}2)$$

Puisque Q est elliptique d'ordre 2, à coefficients analytiques, il résulte du théorème de T. KOTAKE-N. NARASIMHAN 1-2-2, que u est analytique dans Γ.

On suppose maintenant que $u \in A(\Gamma)$, et on va démontrer qu'il existe $s>0$ convenable, telle que u soit dans E_s. Par les cartes locales, on est ramené à démontrer le lemme classique suivant :

Lemme 2-1-1

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in A(\omega)$ et $Y_1,\ldots,Y_r$ des opérateurs différentiels du premier ordre, à coefficients analytiques dans ω. Alors, pour tout compact K de ω il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$

$$\|Y^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|! \qquad (2\text{-}1\text{-}3)$$

Démonstration du Lemme :

Il suffit de démontrer qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 positives telles que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$ et $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\|D^\beta Y^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} \cdot C_2^{|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)! \qquad (2\text{-}1\text{-}4)$$

où

$$|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n \quad , \quad D^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \ldots D_{x_n}^{\beta_n} \quad .$$

L'inégalité (2-1-4) se démontre par récurrence sur $|\alpha|$, et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, car (2-1-4) est vraie pour $|\alpha| = 0$, puisque $u \in A(\omega)$. On obtient (2-1-3) en faisant $\beta = 0$ dans (2-1-4).

Corollaire 2-1-1 : avec les notations du Lemme 2-1-1, soit $u \in A(\omega)$. Alors, pour tout compact K de ω il existe une constante C telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|Y_i^k u\|_{L^2(K)} \leq C^{k+1} k! \quad \text{pour tout} \quad i = 1,\dots,r . \tag{2-1-5}$$

Définition 2-1-1 :

Si P est un opérateur linéaire continu dans $A(\Gamma)$. On dit que P est singulier de type $d \in \mathbb{N}$ dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$, s'il existe $s_0 > 0$ et $C > 0$ telles que l'on ait pour tout

$$0 < s' < s < s_0$$

$$P \in \mathcal{L}(E_s, E_{s'}) \quad \text{et} \quad \|P\|_{\mathcal{L}(E_s,E_{s'})} < \frac{C}{(s-s')^d} \tag{2-1-6}$$

Le théorème suivant est démontré dans [3]

Théorème 2-1-1_3 :

Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique défini sur Γ, d'ordre $d \in \mathbb{N}$. Alors P est singulier de type d dans la chaîne définie en (2-1-1).

On en déduit du théorème 2-1-1 le résultat suivant :

Théorème 2-1-2 :

Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbb{N}$), défini sur Γ. On considère une fonction u dans $A(\Gamma)$. Alors, il existe une constante $M > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|P^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leq M^{k+1} (dk)! \tag{2-1-7}$$

Démonstration :

Puisque $u \in A(\Gamma)$, donc il existe $s_0 > 0$ telle que $u \in E_{s_0}$; d'après le théorème 2-1-1, il en résulte qu'il existe une constante $C > 0$, telle que l'on ait pour tout $0 < s' < s \leq s_0$ et tout $v \in E_s$

$$\|Pv\|_{E_{s'}} \leq \left(\frac{C}{s-s'}\right)^d \|v\|_{E_s} . \tag{2-1-8}$$

soit $s_1 \in]\, 0\, ,\, s_0\, [$; en choissisant $s - s' = \frac{s_0 - s_1}{k}$ dans (2-1-8) on obtient pour chaque $k \in \mathbb{N}$

$$\|P^k u\|_{E_{s_1}} \leq \frac{(C\,k)^{dk}}{(s_0 - s_1)^{dk}} \|u\|_{E_{s_0}}$$

d'où

$$\|P^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|P^k u\|_{E_{s_1}} \leq \left(\frac{C}{s_0 - s_1}\right)^{dk} . \|u\|_{E_{s_0}} . k^{dk}$$

ce qui implique (2-1-7).

Hyperfonctions et microfonctions 2-1-2 :

Plaçons-nous pour simplifier dans $\mathbb{R}^n$ muni de son orientation et de sa mesure de Lebesgue. Les faisceaux des fonctions analytiques, des fonctions C^∞, des distributions et des hyperfonctions s'identifient à des sous-faisceaux les uns des autres

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{D}' \subset \mathcal{B}$$

On déduit de cette identification que : si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction holomorphe dans $(\omega + i\Gamma) \cap \tilde{\omega}$, où $\tilde{\omega}$ est un voisinage complexe de ω dans $\mathbb{C}^n$. (nous noterons $f \in \mathcal{O}(\omega + i\Gamma)$. On peut définir la valeur au bord $b(f) \in B(\omega)$. Et si f est à croissance lente au voisinage du réel, on a :

$$b(f) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma}} f(x + iy) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}' \ .$$

Une distribution u peut toujours s'écrire sous la forme

$$u = \sum_{\alpha \in A} \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \Gamma}} f_\alpha(x + i\Gamma_\alpha) \tag{2-1-9}$$

où f_α sont holomorphes à croissance lente, Γ_α une famille finie de cônes ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$, et la limite est au sens des distributions. L'hyperfonction associée à u sera

$$\tilde{u} = \sum_{\alpha \in A} b(f_\alpha) \tag{2-1-10}$$

Définition 2-1-3 (Spectre singulier Analytique de SATO [5])

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in B(\omega)$. Le Spectre Singulier Analytique (SSA au sens de SATO) de u est un sous-ensemble fermé de $\omega \times s^{n-1}$ caractérisé par : un point (x_0, ξ_0) n'appartient pas à SSA(u) si et seulement s'il existe un nombre fini de cônes ouverts convexes, tels que $\xi_0 \notin \Gamma_\alpha^0$ (i.e. Γ_α^0 est la partie de s^{n-1} définie par :

$$\Gamma_\alpha^0 = \{ y \in s^{n-1} \mid \forall x \in \Gamma_\alpha, \langle x, y \rangle \geqslant 0 \})$$

et des fonctions holomorphes f_α dans l'intersection de $\mathbb{R}^n + i\Gamma_\alpha$ et d'un voisinage complexe de x_0 telles que l'on ait

$$u = \sum_\alpha b(f_\alpha) \quad \text{au voisinage de } x_0. \tag{2-1-11}$$

Définition 2-1-4 (Le front d'onde analytique de Hörmander ωFA [8])

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\omega)$. Le front d'onde analytique de u, noté $\omega FA(u)$, est un sous-ensemble fermé de $\omega \times s^{n-1}$ caractérisé par la propriété suivante :

$(x_0, \xi_0) \notin \omega FA(u)$ si et seulement s'il existe un voisinage conique I de ξ_0, un voisinage v de x_0, une suite bornée (u_{n_N}) de distributions à support compact, et une constante $C > 0$ telle que l'on ait :

$$\left| \begin{array}{l} u_N = u \quad \text{sur} \quad v \\ |\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C^{N+1} N^N |\xi|^{-N} \quad \text{pour} \quad \xi \in I \end{array} \right. \tag{2-1-12}$$

Notons que J.M. BONY a démontré l'identité des ensembles SSA(u) et $\omega FA(u)$ (voir [5]).

Définition 2-1-15 (Les microfonctions analytiques [6], [13])

Soit U un ouvert de $\omega \times s^{n-1}$. Le faisceau des microfonctions analytiques sur U peut être défini par :

$$\mathcal{C}(U) = \frac{B(\omega)}{\{ u \in B(\omega) \mid SSA(u) \cap U = \emptyset \}}$$

Remarque 2-1-1 : Dans le cas où $U = \omega \times s^{n-1}$, on a :

$$\mathcal{C}(\omega \times s^{n-1}) = B(\omega)/A(\omega)$$

Donc, si $u \in B(\omega)$, on lui associe ainsi canoniquement un élément noté $\tilde{u}$ de $\mathcal{C}(\omega x s^{n-1})$. Ce dernier est nul si et seulement si u est analytique dans ω.

Théorème 2-1-3 6 (Trace d'une hyperfonction)

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $(p,q \geqslant 1)$, si une hyperfonction $u \in B(\omega)$ est telle que :

$$SSA(u) \cap \{(x,0,0,\tau) \mid (x,0) \in \omega, \ \tau \in s^{q-1}\} = \phi$$

On peut définir la restriction de u à $\mathbb{R}^p \cap \omega$ noté $u(x,0)$ comme un élément de $B(\omega \cap \mathbb{R}^p)$. On a de plus :

$$SSA(u(x,0)) \subset \{(x,\xi) \mid x \in \omega \cap \mathbb{R}^p \ \exists \tau \in s^{q-1} ; \ (x,0,\xi,\tau) \in SSA(u)\}$$

Remarque 2-1-2 : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $u \in B(\omega)$ tels que :

$$SSA(u) \cap \{(x,0,0,\tau) \mid (x,0) \in \omega \quad \text{et} \quad \tau \in s^{q-1}\} = \phi$$

et $\tilde{u}$ l'image de u dans $\mathcal{C}(\omega x s^{p+q-1})$. On sait qu'on peut définir l'hyperfonction $u_{|\mathbb{R}^p}$. Dans ce cas, la restriction de $\tilde{u}$ à $\mathbb{R}^p \times s^{p-1}$ est alors bien défini (voir [6]) et on a :

$$\tilde{u}_{|\mathbb{R}^p \times s^{p-1}} = \widetilde{(u_{|\mathbb{R}^p})}$$

Théorème fondamental de SATO (a) 2-1-4 [6] :

Soit $p(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ à coefficients analytiques dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, de symbole principal p_m. Pour tout $u \in B(\omega)$ on a :

$$SSA(u) \subset SSA(pu) \cup \{(x,\xi) \in \omega x s^{n-1} \mid p_m(x,\xi) = 0\} .$$

Corollaire 2-1-2 :

Soient p un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ à coefficients analytiques, elliptique dans ω (i.e $\forall x \in \omega$, $\forall \xi \in s^{n-1}$ $p_m(x,\xi) \neq 0$) et $u \in B(\omega)$. Si pu est analytique dans ω. Alors u est analytique dans ω.

En effet : d'après théorème de SATO (a), on a

$$SSA(u) \subset SSA(pu)$$

car $\left\{(x,\xi) \in \omega \times S^{n-1} \; ; \; p_m(x,\xi) = 0\right\} = \phi$

puisque p est elliptique dans ω. Mais on sait que

$$SSA(pu) = \phi \Leftrightarrow pu \in A(\omega)$$

d'où $$SSA(u) = \phi \Leftrightarrow u \in A(\omega) .$$

Opérateurs pseudo-différentiels réels 2-1-6

Un opérateur pseudo-différentiel réel $P(x,D_x)$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ est équivalent (d'après [13] [S.K.K.]) à la donnée d'un symbole

$$p(x,\xi) = \sum p_k(x,\xi)$$

dans l'ouvert conique $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, où les fonctions analytiques $p_k(x,\xi)$ sont positivement homogènes de degré k en ξ, et se prolongent holomorphiquement à un même voisinage complexe de U dans $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, si $u \in \mathcal{C}(U)$, on peut définir $p(x,D_x)u$ comme élément de $\mathcal{C}(U)$. Il est à noter que les opérateurs pseudo-différentiels, d'ordre fini, définis dans ([S.K.K.] [13]) coïncident dans le cas où ils sont définis globalement, avec ceux de Boutet de Monvel et P. Krée [7] (voir [5]).

Théorème de SATO (b) 2-1-5

Soient $p(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$, réel sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, où $U = \omega \times I$, on considère $u \in B(\omega)$. Alors, on a :

$$SSA(u) \subset SSA(pu) \cup \left\{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0\right\}$$

où $p_m(x,\xi)$ est le symbole principal de $p(x,\xi)$.

Démonstration : Soit $(x_0,\xi_0) \notin SSA\,\mathcal{V}$ $(pu = \mathcal{V})$ tel que

$$(x_0,\xi_0) \notin \left\{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0\right\}$$

Il existe donc un voisinage v de (x_0,ξ_0) ne rencontrant pas

$$SSA(pu) \cap \{p_m(x,\xi) = 0\}$$

p est donc inversible dans v et si $\tilde{u}$ désigne l'image de u dans $\mathcal{C}(v)$, on a :

$$p(x,D_x)\,\tilde{u} \equiv 0$$

car

$$SSA(pu) \cap v = \phi$$

donc

$$p^{-1}\,(p(x,D_x)\tilde{u}) \equiv 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{C}(v)$$

d'où

$$\tilde{u} \equiv 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{C}(v)$$

et, par conséquent

$$SSA(u) \cap v = \phi$$

d'où

$$(x_0,\xi_0) \notin SSA(u)$$

donc

$$SSA(u) \subset SSA(pu) \cup \{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0\} \cdot$$

II - RESULTAT

Nous allons démontrer le :

Théorème 2-2-1 (Caractérisation des fonctions analytiques dans un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$)

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_1,\ldots x_n$ des champs de vecteurs réels, analytiques dans ω, qui sont linéairement indépendants en tout point de ω. Soit u une fonction C^∞ sur ω. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est analytique dans ω.

(ii) Pour tout compact K de ω, il existe une constante $L > 0$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1,2,..,n$

$$\| x_i^k\, u \|_{L^2(K)} \leq L^{k+1}\, k! \tag{2-2-1}$$

Démonstration

Il est clair que, d'après le lemme 2-1-1 ,(i) implique (ii). Supposons maintenant que (ii) est vérifiée. Soit K un compact de ω. Posons :

$$(2\text{-}2\text{-}2) \qquad v_\alpha(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (i x_\alpha)^k u(x)}{k!}$$

D'après l'inégalité (2-2-1), cette expression a bien un sens pour $(x,t) \in K \times]-\epsilon,\epsilon[$, ϵ assez petit (il suffit de choisir $\epsilon > 0$ telle que $L\epsilon < 1$).

On remarque que :

$$(2\text{-}2\text{-}3) \qquad \left| \begin{array}{l} P_\alpha v_\alpha(x,t) = 0 \\ v_\alpha(x,0) = u(x), \quad \alpha = 1,2,\ldots,n \end{array} \right. .$$

où $P_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} - i x_\alpha$

Puisque P_α est un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans $K \times]-\epsilon,\epsilon[$, d'après le théorème de SATO (a) 2-1-4, on a

$$SSA\, v_\alpha(x,t) \subset SSA(P_\alpha v_\alpha) \cup \left\{(x,t,\xi,\tau) \mid (x,t) \in K \times]-\epsilon,\epsilon[,\ (\xi,\tau) \in S^n ; i\tau - x_\alpha(x,\xi) = 0\right\}$$

pour $\alpha = 1,2,\ldots,n$;

puisque $P_\alpha v_\alpha = 0$, $SSA(P_\alpha v_\alpha) = \phi$ d'où

$$SSA\, v_\alpha(x,t) \subset \left\{(x,t,\xi,\tau) \mid i\tau - x_\alpha(x,\xi) = 0\right\} ;$$

d'autre part, d'après le théorème 2-1-3, on peut définir la trace $v_\alpha(x,0)$ de $v_\alpha(x,t)$ pour tout α et on a :

$$SSA\, v_\alpha(x,0) \subset \left\{(x,\xi) \in K \times S^{n-1} ; \exists \tau, |\tau| = 1 \text{ t.q. } (x,0,\xi,\tau) \in SSA\, v_\alpha \right\}$$

pour tout $\alpha = 1, 2,\ldots,n$.

Supposons que $SSA(u) \neq \phi$: il existe donc $(x,\xi) \in \omega \times S^{n-1}$ tel que

$$(x,\xi) \in SSA\, v_\alpha(x,0)$$

car

$$v_\alpha(x,0) = u(x) \qquad \text{pour tout } \alpha$$

donc il existe τ , $|\tau| = 1$, tel que :

$$(x,0,\xi,\tau) \in SSA\ \gamma_\alpha\ (x,t)$$

d'où

$$i\tau - x_\alpha\ (x,\xi) = 0$$

Comme les $x_\alpha(x,\xi)$ sont réels, pour tout α, on a

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad x_\alpha(x,\xi) = 0\ \forall \alpha .$$

Puisque $(x_j)_{1\le j\le n}$ sont linéairement indépendants, on en déduit que

$$\xi = 0$$

mais c'est impossible car $\xi \in S^{n-1}$

d'où

$$SSA(u) = SSA\ \gamma_\alpha(x,0) = \phi\ \forall \alpha .$$

Par conséquent $u \in A(\omega)$. Ce qui démontre le théorème 2-2-1.

Corollaire 2-2-1 : Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et u une fonction C^∞ sur ω. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(2-2-4)

(a) u est analytique dans ω.

(b) Pour tout compact K de ω, il existe une constante $L_1 > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k u \right\|_{L^2(K)} \leqslant L_1^{k+1}\ k!$$

avec $i = 1,2,\ldots,n$.

en effet, on pose

$$x_j = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2,\ldots,n$$

comme x_α vérifient les hypothèses du théorème (2-2-1) on est ramené au théorème précédent.

CHAPITRE III

Dans ce chapitre, on se propose d'étendre le théorème de T. KOTAKE-N. NARASIMHAN 1-2-2 (voir [10] , au cas des opérateurs pseudo-différentiels analytiques : au sens de [7] , elliptiques définis sur une variété Γ analytique réelle, compacte, sans bord de dimension n.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique défini sur Γ. On sait que P opère de $C^\infty(\Gamma)$ dans $C^\infty(\Gamma)$, et par conséquent P^k opère de $C^\infty(\Gamma)$ dans $C^\infty(\Gamma)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le résultat principal de ce chapitre est le :

THEOREME 3-1-1 - Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique sur Γ , d'ordre 1 et elliptique. On suppose que le symbole principal de P est réel.

On considère une fonction u de classe C^∞ sur Γ vérifiant l'hypothèse suivante :

> Il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$
>
> (3-1-1) $\quad \|P^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant L^{k+1}\ k!$

Alors u est analytique dans Γ .

Démonstration : Soient $x \in \Gamma$, (ω_1, φ_1) une carte locale en x et

$$\omega'_1 = \varphi_1(\omega_1)$$

Soient ω un voisinage ouvert de x tel que $\omega \Subset \omega_1$, $\varphi = \varphi_1|_\omega$ et $\omega' = \varphi(\omega)$

Donc on a deux ouverts ω'_1 et ω' de $\mathbb{R}^n$, tels que

$$\omega' \Subset \omega'_1$$

dire que u est analytique dans ω équivaut à dire que $u \circ \varphi^{-1}$ est analytique dans ω'.

On définit un opérateur pseudo-différentiel Q sur ω' par :

$$Q(u \circ \varphi^{-1}) = P(u) \circ \varphi^{-1}$$

mais, comme la classe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques ne dépend pas du système de coordonnées qu'on choisit pour les définir (voir [14]), Q est un opérateur pseudo-différentiel analytique, d'ordre 1, elliptique dans ω' et de

symbole principal réel. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Q^k (u \circ \varphi^{-1}) = P^k u \circ \varphi^{-1} \tag{3-1-2}$$

$$\| Q^k (u \circ \varphi^{-1}) \|_{L^2(\omega')} = \| P^k (u) \circ \varphi^{-1} \|_{L^2(\omega')} \quad ; \tag{3-1-3}$$

on fait le changement de variable : $\omega \xrightarrow{\varphi} \omega'$. Il existe alors une constante $L_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\| Q^k (u \circ \varphi^{-1}) \|_{L^2(\omega')} \leqslant L_1^{k+1} k! \tag{3-1-4}$$

On pose $u_1 = u \circ \varphi^{-1}$ et on définit

$$\vartheta (x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k u_1 (x) \tag{3-1-5}$$

donc, d'après (3-1-4), on en déduit qu'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que l'on ait pour tout $|t| < \epsilon$

$$\| \vartheta (x,t) \|_{L^2(\omega' \times]-\epsilon,\epsilon[)} < + \infty \quad .$$

il suffit de choisir $\epsilon > 0$ de sorte que $L_1 \epsilon < 1$. En particulier, $\vartheta(x,t)$ est une hyperfonction définie sur $\omega' \times]-\epsilon,\epsilon[$.

Proposition 3-1-1

$$SSA\, \vartheta(x,t) \cap \{(x,t,0,\mp 1)\, t.q\ (x,t) \in \omega' \times]-\epsilon, \epsilon[\} = \phi$$

Démonstration de la proposition :

Il suffit de démontrer, d'après [5] que $(x,t,0,\mp 1) \notin \omega FA\, \vartheta(x,t)$

Soient $(x_0,t_0) \in \omega' \times I$, où $I =]-\epsilon,\epsilon[$, $r > 0$ et $B(x_0,2r)$ la boule du centre x_0 et de rayon $2r$ telle que

$$B(x_0,2r) \subset \omega'$$

de même

$$B(t_0,2r) \subset I \quad .$$

Sur la boule $B(x_0,2r)$ on définit la fonction de troncature suivante :

$$\chi(x) \in C_0^\infty (B(x_0, 2r)$$
$$\chi(x) = 1 \quad \text{sur} \quad B(x_0,r)$$
$$0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1 \ .$$

D'autre part, on définit sur la boule $B(t_0,2r)$ la suite de fonctions suivantes :

$$\Psi_N(t) \in C_0^\infty (B(t_0,2r)$$
$$\Psi_N(t) = 1 \quad \text{sur} \quad B(t_0,r)$$

et il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $q \leqslant N$ $N = 1,2,\ldots$

$$\text{(3-1-6)} \qquad \sup | D^q \psi_N (t)| \leqslant C^{q+1} N^q , \quad q \leqslant N \ ;$$

une telle suite existe, voir [8] (Lemme 2-2). On pose alors

$$\text{(3-1-7)} \qquad \vartheta_N (x,t) = \chi(x) \Psi_N(t) \ \vartheta(x,t) \ .$$

Puisque $\vartheta(x,t) \in \mathcal{D}' (\omega' \times I)$, on a :

$$\vartheta_N (x,t) \in \mathcal{E}'(B(x_0,2r) \times B(t_0,2r))$$

avec

$$\vartheta_N (x,t) = \vartheta(x,t) \quad \text{sur} \quad B(x_0,r) \times B(t_0,r) \ ;$$

on obtient donc :

$$\hat{\vartheta}_N (\xi,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{a_k \chi} (\xi) \frac{1}{k!} \int_{B(t_0,2r)} t^k \Psi_N(t) \ e^{-it\tau} dt$$

où

$$a_k(x) = Q^k \ u_1(x) \quad \text{avec} \quad u_1 = u \circ \varphi^{-1} \ .$$

Première étape

$$\hat{\vartheta}_N(\xi,\tau) = \widehat{a_0 \chi}(\xi) \hat{\Psi}_N(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{a_k \chi}(\xi) \frac{1}{k!} \int_{B(t_0,2r)} t^k \Psi_N(t) e^{-it\tau} dt$$

$$\widehat{a_k \chi}(\xi) = \int_{B(x_0,2r)} a_k(x) \chi(x) \ e^{-ix\xi} dx$$

$$|\widehat{a_k \chi}(\xi)| \leq \left(\int |a_k(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int |\chi(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$|\widehat{a_k \chi}(\xi)| \leq L_1^{k+1}\, k!\, C_1$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de ω'.

D'autre part, d'après l'inégalité (3-1-6) en intégrant par parties, on en déduit qu'il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait :

(3-1-8) $$|\widehat{\Psi}_N(\tau)| \leq C^{N+1}\, N^N\, |\tau|^{-N}$$

d'où

(3-1-9) $$|\widehat{a_0 \chi}(\xi)\, \widehat{\Psi}_N(\tau)| \leq C_2^{N+1}\, N^N\, |\tau|^{-N}$$

où C_2 est une constante qui ne dépend pas de N. En effet,

$$\widehat{\Psi}_N(\tau) = (i\tau)^{-N} \int_{B(t_0,2r)} e^{-it\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^N \Psi_N(t)\, dt \ .$$

Deuxième étape

On pose

$$I_k(\tau) = \int_{B(t_0,2r)} t^k \Psi_N(t)\, e^{-it\tau}\, dt \ .$$

Comme $t^k \Psi_N(t)$ est à support compact dans $B(t_0, 2r)$, on a :

$$I_k(\tau) = \int_{B(t_0,2r)} t^k \Psi_N(t)\, (-i\tau)^{-N} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^N (e^{-it\tau})\, dt$$

$$I_k(\tau) = (+i)^{-N} (\tau)^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^N (t^k \Psi_N(t))\, e^{-it\tau}\, dt$$

$$|I_k(\tau)| \leq |\tau|^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \sum_{p \leq N} \frac{N!}{p!(N-p)!} \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p t^k\right| \cdot \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-p} \Psi_N(t)\right| .dt$$

$$|I_k(\tau)| \leq |\tau|^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \sum_{p \leq N} \frac{N!}{p!(N-p)!} \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p t^k\right| C^{N-p+1}\, N^{N-p}\, dt$$

1er cas $k \leq N$: On a

$$L_1^{k+1} \, | I_k(\tau)| \leq L_1^{k+1} \, |\tau|^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \sum_{p=0}^{K} \frac{N!}{p!(N-p)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p t^k \, | \, . C^{N-p+1} \, N^{N-p} \, dt +$$

$$+ L_1^{k+1} \, |\tau|^{-N} \int_{B((t_0,2r)} \sum_{p=K+1}^{N} \frac{N!}{p!(N-p)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p t^k \, | \, . \, C^{N-p+1} \, N^{N-p} \, dt$$

$$L_1^{k+1} \, | I_k(\tau)| \leq L_1^{k+1} \, |\tau|^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \sum_{p=0}^{k} \frac{N!}{p!(N-p)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p t^k \, | \, . C^{N-p+1} \, N^{N-p} \, dt$$

$$L_1^{k+1} \, | I_k(\tau)| \leq L_1^{k+1} \, |\tau|^{-N} \int_{B(t_0,2r)} \sum_{p=0}^{k} \frac{N!}{p!(N-p)!} k(k-1)\ldots(k-p+1) t^{k-p} . C^{N-p+1} . N^{N-p} \, dt$$

et puisque $L_1 \epsilon < 1$, on a :

(3-1-10) $$L_1^{k+1} \, | I_k(\tau)| \leq 2 \, |\tau|^{-N} \left[C^{N+1} \, N^N \, (L_1\epsilon)^k + C^N \, N^N \, k. \, (L_1\epsilon)^{k-1} . \, L_1 + \right.$$

$$C^{N-1} \, N^{N-2} \, \frac{N(N-1)}{2!} k \, (k-1) \, (L_1\epsilon)^{k-2} . L_1^{\,2}$$

$$\left. + \ldots + C^{N-k+1} \, N^{N-k} \, L_1^{\,k} \, N(N-1) \, (N-2)\ldots(N-k+1) \right]$$

2ème cas $k > N$: on a

(3-1-11) $$L_1^{k+1} \, | I_k(\tau) \leq 2 \, |\tau|^{-N} \left[C^{N+1} \, N^N (L_1\epsilon)^k + C^N \, N^N \, k(L_1\epsilon)^{k-1} . \, L_1 + \right.$$

$$C^{N-1} . N^{N-2} \, \frac{N(N-1)}{2!} \, k(k-1)(L_1\epsilon)^{k-2} . L_1^{\,2} + \ldots$$

$$\left. \ldots . + C \, k(k-1) \, (k-2) \, \ldots (k-N+1) (L_1\epsilon)^{k-N} . \, L_1^{\,N} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\widehat{a_k \chi}(\xi)| . | I_k(\tau)| \leq C_1 \left\{ \sum_{k=1}^{N} L_1^{k+1} \, | I_k(\tau)| + \sum_{k=N+1}^{\infty} L_1^{k+1} \, | I_k(\tau) \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \, |\widehat{a_k \chi}(\xi)| . | I_k(\tau)| \leq 2 \, C_1 \, |\tau|^{-N} \left\{ C^{N+1} . N^N \sum_{k=1}^{\infty} (L_1\epsilon)^k + C^N . N^N \sum_{k=1}^{\infty} k(L_1\epsilon)^{k-1} . L_1 + \right.$$

$$+ C^{N-1} N^{N-2} \frac{N(N-1)}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(L_1\epsilon)^{k-2} . L_1^2 + \dots +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-N+1) (L_1\epsilon)^{k-N} . L_1^N \Big\}$$

Comme on sait que $L_1\epsilon < 1$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\hat{a_k}\chi(\xi)| . |I_k(\tau)| \leq 2 C_1 |\tau|^{-N} \Big\{ C^{N+1} . N^N \frac{L_1\epsilon}{1-L_1\epsilon} + C^N . N^N \frac{L_1}{(1-L_1\epsilon)^2} +$$

$$+ C^{N-1} N^{N-2} \frac{N(N-1)}{2!} \frac{2! L_1^2}{(1-L_1\epsilon)^3} + \dots + N! \frac{L_1^N . C}{(1-L_1\epsilon)^{N+1}} \Big\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\hat{a_k}\chi(\xi)| . |I_k(\tau)| \leq 2 C_1 |\tau|^{-N} \Big\{ C^{N+1} . N^N \frac{1}{(1-L_1\epsilon)} + C^N . N^N \frac{L_1}{(1-L_1\epsilon)^2} +$$

$$+ C^{N-1} . N^N \frac{L_1^2}{(1-L_1\epsilon)^3} + \dots + N^N \frac{L_1^N C}{(1-L_1\epsilon)^{N+1}} \Big\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\hat{a_k}\chi(\xi)| . |I_k(\tau)| \leq |\tau|^{-N} . N^N . \frac{(2 C_1 C L_1)^{N+1}}{(1-L_1\epsilon)^{N+1}} .$$

on pose $M_1 = \dfrac{2 C C_1 L_1}{1 - L_1\epsilon}$ on obtient :

$$(3\text{-}1\text{-}12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\hat{a_k}\chi(\xi)| . |I_k(\tau)| < M_1^{N+1} . N^N . |\tau|^{-N}$$

où M_1 est une constante qui ne dépend pas de N et, par conséquent, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |\hat{a_k}\chi(\xi)| . |I_k(\tau)| \leq C_2^{N+1} N^N |\tau|^{-N} + M_1^{N+1} N^N |\tau|^{-N}$$

d'où

$$|\hat{\mathcal{V}}_N(\xi,\tau)| \leq (2 M_2)^{N+1} N^N |\tau|^{-N} \qquad \text{avec} \quad M_2 = \max (C_2, M_1)$$

donc

$$(3\text{-}1\text{-}13) \qquad |\hat{\mathcal{V}}_N(\xi,\tau)| \leq M_3^{N+1} . N^N . |\tau|^{-N} \qquad \text{avec} \quad M_3 = 2 M_2 \ .$$

Soient $\alpha > 0$ et $\Gamma_\alpha = \{ \xi = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |\xi| < \alpha |\tau| \}$, Γ_α est un voisinage ouvert conique de $(0,\mp 1)$ et on a pour tout $\zeta = (\xi,\tau) \in \Gamma_\alpha$, $|\zeta| < (1+\alpha^2)^{1/2} |\tau|$ donc

$$|\zeta| < C_\alpha |\tau| \qquad \text{avec} \qquad C_\alpha = (1+\alpha^2)^{1/2}$$

d'où

$$|\tau|^{-N} < C_\alpha^N |\zeta|^{-N} \quad \forall \zeta \in \Gamma_\alpha$$

et, par conséquent

$$|\hat{\vartheta}_N(\zeta)| = |\hat{\vartheta}(\xi,\tau)| \leq M_3^{N+1} N^N C_\alpha^N |\zeta|^{-N}$$

$$|\hat{\vartheta}_N(\zeta)| \leq M^{N+1} . N^N . |\zeta|^{-N}, \forall \zeta \in \Gamma_\alpha \tag{3-1-14}$$

où $M = M_3 C_\alpha$ qui ne dépend pas de N.

Il en résulte d'après [8] que :

$$(x_0,t_0,0,\mp 1) \notin \omega FA\, \vartheta(x,t)$$

et, comme $(x_0,t_0) \in \omega' \times]-\epsilon, \epsilon[$ est quelconque. On a

$$(x,t,0,\mp 1) \notin \omega FA\, \vartheta(x,t) .$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 3-1-1.

On déduit de la proposition 3-1-1 et du théorème de trace 2-1-3, que la restriction de $\vartheta(x,t)$ à $\mathbb{R}^n$ est bien définie comme hyperfonction sur ω'. De plus :

$$SSA\, \vartheta(x,0) \subset \{ (x,\xi) \in \omega' \times S^{n-1} \mid \exists \tau \in S^0 \; ; \; (x,0,\xi,\tau) \in SSA\, \vartheta \}$$

et $\vartheta(x,0) = u_1(x)$

On note

$$V = \{ (x,t,0,\mp 1) \; , \; (x,t) \in \omega' \times]-\epsilon \; , \epsilon [\}$$

$$U = \Omega \times S^n \setminus V \quad \text{où } \Omega = \omega' \times I \; .$$

On note encore $\vartheta(x,t)$ l'image de $\varphi(x,t)$ dans :

$$\mathcal{C}(\Omega \times S^n) = B(\Omega)/_{a(\Omega)} \quad .$$

On pose maintenant :

$$R(x,t,\frac{\partial}{\partial t}, D_x) = \frac{\partial}{\partial t} - Q\ (x, D_x)$$

$R(x,t,\frac{\partial}{\partial t}, D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel analytique défini sur U et

(3-1-15) $$R(x,t,\frac{\partial}{\partial t}, D_x)\,\vartheta(x,t) \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(U) \ .$$

On peut appliquer le théorème de SATO (b) 2-1-5, ce qui donne

$$SSA\ \vartheta(x,t) \subset SSA(R\vartheta) \cup \left\{(x,t,\xi,\tau) \mid i\tau - Q_1\ (x,\xi) = 0\right\}$$

puisque $Q_1(x,\xi)$ est réel on a :

$$SSA\ \vartheta(x,t) \subset SSA(R\vartheta)\ \cup \left\{(x,t,\xi,\tau) \mid \tau = 0 \quad \text{et} \quad Q_1(x,\xi) = 0\right\}$$

mais comme Q est elliptique dans ω' on a :

$$\left\{(x,t,\tau,\xi)\ ;\ \tau = 0 \quad \text{et} \quad Q_1(x,\xi) = 0\right\} = \phi$$

d'où

$$SSA\ \vartheta \subset SSA(R\vartheta)$$

et d'après (3-1-15), il en résulte que :

$$SSA\ \vartheta \cap U = \phi \ .$$

On déduit de la proposition 3-1-1 que : $SSA\ \vartheta \cap V = \phi$ d'où

$$SSA\ \vartheta = \phi \ .$$

C'est à dire que $\vartheta(x,t)$ est analytique dans $\omega' \times\ ]-\epsilon, \epsilon[$ et en particulier

$\vartheta(x,0) = u_1(x)$ est analytique dans ω'

d'où

(3-1-16) $$u_1 = u \circ \varphi^{-1} \in A(\omega') \Leftrightarrow u \in A(\omega) \ ;$$

donc le théorème 3.1.1 est démontré.

On peut généraliser le théorème 3.1.1. au cas des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $\geqslant 1$, plus précisément on a le

Théorème 3-1-2 :

Soient Γ une variété analytique réelle, compacte, sans bord, de dimension n, et $P = P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre m ($m \in \mathbb{N}$) elliptique défini sur Γ ; on suppose que le symbole principal de P est réel.

On considère une fonction u de classe C^∞ sur Γ. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est analytique dans Γ

(ii) Il existe une constante $L > 0$, telle que l'on ait pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|P^k u\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant L^{mk+1} (mk)! \tag{3-1-17}$$

Démonstration

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du théorème 2-1-2.

On suppose maintenant que (ii) est vérifiée et on va démontrer que $u \in A(\Gamma)$. En gardant les mêmes notations qu'au théorème 3-1-1, on est ramené, par cartes locales, à démontrer que $u \circ \varphi^{-1}$ est analytique dans ω', dans ce cas : on a Q un opérateur pseudo-différentiel analytique, d'ordre m, elliptique dans ω', et de symbole principal réel, défini par :

$$Q(u \circ \varphi^{-1}) = P(u) \circ \varphi^{-1} .$$

Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$Q^k(u \circ \varphi^{-1}) = P^k u \circ \varphi^{-1}$$

donc il existe une constante $L_1 > 0$ telle que :

$$\|Q^k(u \circ \varphi^{-1})\|_{L^2(\omega')} \leqslant L_1^{mk+1} (mk)! \tag{3-1-18}$$

1er cas : Si m est impair, on pose

$$(3\text{-}1\text{-}19) \qquad v_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{mk}}{(mk)!} Q^k u_1(x)$$

où $u_1 = u \circ \varphi^{-1}$

2ème cas : Si m est pair, on pose

$$(3\text{-}1\text{-}20) \qquad v_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{mk}}{(mk)!} (i Q)^k u_1(x)$$

D'après (3-1-18), il en résulte qu'il existe $\epsilon > 0$ telle que l'on ait pour tout $|t| < \epsilon$

$$\| v_j(x,t) \|_{L^2(\omega' x]-\epsilon,\epsilon[)} < +\infty \quad \text{avec} \quad \alpha' = 1,2 \ .$$

Il suffit de choisir ϵ telle que $L_1 \epsilon < 1$, et, par conséquent

$$v_\alpha(x,t) \in B(\omega' x]-\epsilon,\epsilon[) \ .$$

En suivant la même méthode que celle dans la proposition 3.1.1, on démontre que :

$$SSA\, v_\alpha(x,t) \cap \{ (x,t,0,\mp 1) ; \ (x,t) \in \omega' x]-\epsilon,\epsilon[\} = \phi$$

avec $\alpha' = 1,2$

On déduit du théorème de trace 2-1-3 que la restriction de $v_\alpha(x,t)$ à $\mathbb{R}^n$ est bien définie. De plus

$$SSA\, v_\alpha(x,0) \subset \{ (x,\xi) \in \omega' \times S^{n-1} \mid \exists \tau \in S^0 \ ; \ (x,0,\xi,\tau) \in SSA\, v_\alpha \}$$

et $v_\alpha(x,0) = u_1(x)$, $\alpha' = 1,2$.

On pose maintenant

a) si m est impair

$$R_1(x,t) \frac{\partial}{\partial t}, D_x) = (\frac{\partial}{\partial t})^m - Q(x,D_x)$$

b) si m est pair

$$R_2\left(x,t\,\frac{\partial}{\partial t}\,,\,D_x\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m - i\,Q\,(x,D_x) \quad .$$

R_1 et R_2 sont deux opérateurs pseudo-différentiels analytiques définis sur $U = \Omega \times S^n \setminus V$ où

$$\Omega = \omega' \times]-\epsilon,\epsilon[\quad \text{et} \quad V = \left\{(x,t,0,\mp 1)\ ;\ (x,t)\in \omega' \times]-\epsilon,\epsilon[\right\} \quad .$$

(3-1-21) $$R_1\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)\vartheta_1(x,t) \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(U)$$

(3-1-22) $$R_2\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)\vartheta_2(x,t) \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}(U) \quad .$$

D'après le théorème de SATO (b) 2-1-5, on démontre que

$$SSA\,\vartheta_\alpha \cap U = \phi \quad \alpha = 1,2$$

et comme $$SSA\,\vartheta_\alpha \cap V = \phi$$

on a donc

$$SSA\,\vartheta_\alpha = \phi \quad , \quad \alpha = 1,2$$

d'où

$$\vartheta_\alpha(x,t) \text{ est analytique dans } \omega' \times]-\epsilon,\epsilon[$$

et, en particulier $\vartheta_\alpha(x,0) = u_1(x)$ est analytique dans ω' avec $\alpha = 1,2$

donc $$u_1 = u\ 0\ \varphi^{-1} \in A(\omega') \Leftrightarrow u \in A(\omega)$$

donc le théorème 3-1-2 est démontré.

B I B L I O G R A P H I E

[1] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Régularité Analytique d'opérateurs elliptiques dégénérés - Applications.
Journal of Functional Analysis, vol. 9, n° 2, (1972).

[2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Approximation polynômiale de fonctions C^∞ et Analytiques.
Ann. Inst. de Fourier, Grenoble (21), 4 (1971) p. 149-173.

[3] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Cauchy problem for analytic pseudo-differential operators.
Comm. in P.D.E. (1976) 1 (2), p. 135-189.

[4] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC et B. HANOUZET : Caractérisation de classe de fonctions C^∞ et Analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel.
Journ. de Math. pur. et app. (52) (1973) p. 115-144.

[5] J.M. BONY : Diverses notations de spectre singulier analytique.
Séminaire Goulaouic-Schwartz (1976-1977) à l'Ecole Polytechnique, Exposé n° 3.

[6] J.M. BONY : Hyperfonctions et équations aux dérivées partielles, Cours de 3ème Cycle (1974-1975) à Orsay.

[7] L. BOUTET DE MONVEL et P. KREE : Pseudo-differential operators and Gevrey classes.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble (17) (1967) p. 295-323).

[8] L. HORMANDER : Uniqueness theorems and wave front sets, for solutions of linear differential equations with analytic coefficients.
Comm. on Pure and Applied Mathematic, Vol. XXIV, (1971) p. 671-704.

[9] L. HORMANDER : Linear partial differential operators.
Springer (1963).

[10] T. KOTAKE et N. NARASIMHAN : Regularity theorem for fractional powers of a linear elliptic operator .
Bull. Soc. Math . France,90, (1962) p. 449-471.

[11] J.L. LIONS et E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et Applications.
Volume 3, Dunod Paris (1970).

[12] E. NELSON : Analytic vectors.
Ann. of Maths. Vol. 70, n° 3 (1959) p. 572-615.

[13] [S.K.K.] SATO-KAWAI-KASHIWARA : Microf nctions and pseudo-differential equations.
Springer (287) (1971) p. 264-523.

[14] L. BOUTET DE MONVEL : Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble (22) (1972) p. 229-268.

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 13, 1980, p. 397 à 403.

ANALYTICITÉ ET ITÈRES D'UN SYSTÈME DE CHAMPS NON ELLIPTIQUE

PAR M. DAMLAKHI ET B. HELFFER

1. Introduction et notations

Il est bien connu qu'on peut caractériser les fonctions analytiques réelles dans un ouvert Ω par le contrôle pour tout entier k, sur tout compact de Ω, en $L^{k+1}.k!$ des normes L^2 de leurs dérivées k-ième. On se pose ici la question de savoir si on a des résultats analogues en remplaçant les dérivées k-ièmes par des polynômes homogènes, non commutatifs, d'ordre k de champs de vecteurs analytiques. Plus précisément, soient $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs réels à coefficients analytiques définis dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On note

$$(1.1)\quad X^\alpha = X_{\alpha_1}.X_{\alpha_2}\ldots X_{\alpha_l} \quad \text{avec} \quad \alpha_j \in \{1, \ldots, p\},\ |\alpha| = l \quad \text{et} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l).$$

Lorsque p est égal à n et que les champs X_i sont linéairement indépendants en tout point de Ω, on dit que le système des champs X_i est elliptique. Dans [11], E. Nelson a donné la caractérisation suivante des fonctions analytiques :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un système de champs elliptique et soit* u *une fonction de classe* C^∞ *sur* Ω, *telle que, pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que l'on ait, pour tout* α,

$$(1.2)\qquad \|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1}|\alpha|!$$

alors u *est analytique dans* Ω.

Ce théorème généralisait le cas classique où l'on prend $X_i = \partial/\partial x_i$.

Dans [4] (*cf.* également [2]), Damlakhi démontrait le théorème plus fin suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un système de champs elliptique et soit* u *une fonction de classe* C^∞ *sur* Ω, *telle que, pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que l'on ait, pour* $i = 1, \ldots, n$ *et tout* k

$$(1.3)\qquad \|X_i^k u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{k+1} k!,$$

alors u *est analytique dans* Ω.

Lorsque les X_i sont les champs ∂_{x_i}, le théorème est dû à F. Browder [3]. Dans le cadre des algèbres de Lie, un théorème du même type que le théorème (1.2) est démontré par R. Goodman [7], pour caractériser les vecteurs analytiques d'une représentation unitaire. Nous reviendrons sur cette question dans la remarque (2.6).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1980/397/$ 5.00
© Gauthier-Villars

L'objet de cet article est d'aborder le problème des itérés pour un système de champs non elliptique. On peut en effet se poser naturellement la question de savoir si le théorème (1.1) est vrai pour un système de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ qui vérifient la condition de Hörmander, i.e. $(C.H.)_r$ les champs X_i, ainsi que leurs crochets d'ordre inférieur ou égal à r engendrent, en chaque point x, l'espace tangent $T_x \Omega$.

Les résultats démontrés ici fournissent une réponse positive dans le cas particulier où les champs X_i engendrent une algèbre de Lie nilpotente stratifiée de rang r, i.e. admettant la décomposition

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_r, \tag{1.4}$$

avec

$$[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_j] = \mathcal{G}_{j+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j < r,$$
$$[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_r] = 0.$$

Autrement dit $\mathcal{G}$ est gradué et $\mathcal{G}_1$ engendre $\mathcal{G}$. Une telle définition a été introduite par G. B. Folland [13].

Le théorème principal est le suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soient $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs réels à coefficients analytiques dans Ω vérifiant $(C.H.)_r$ et qui engendrent une algèbre stratifiée de rang r. Soit u une fonction C^∞ sur Ω telle que l'on ait, pour tout α,*

$$\| X^\alpha u \|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha| ! \tag{1.5}$$

Alors u est analytique dans Ω.

Le théorème s'applique par exemple dans les cas suivants :

Exemple 1. — Dans $\mathbb{R}^2$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$$

(dans ce cas, C. Goulaouic nous a indiqué qu'il existait une démonstration plus directe utilisant l'inégalité de Hardy).

Exemple 2. — Dans $\mathbb{R}^3$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Exemple 3. — Dans $\mathbb{R}^2$,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

La démonstration du théorème (1.3) est basée sur le théorème (1.2) et sur le corollaire (2.3). La même démonstration permet d'obtenir une nouvelle caractérisation des vecteurs analytiques d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie stratifié (*cf.* th. 2.7). Elle permet également d'étudier le problème des itérés dans des classes de Gevrey (*cf.* th. 2.9). Au paragraphe 3, on donne une application à un système de champs dérivé du $\overline{\partial}$.

Nous remercions le référé à qui nous devons cette démonstration de la proposition 2.1 (que nous n'avions que dans le cas $\mathcal{G}$ stratifiée).

2. Démonstration du théorème 1.3

Pour pouvoir appliquer le théorème (1.2), il nous faut démontrer pour les crochets d'ordre j ($j \leqq r$) une égalité du type (1.3). Remarquons tout d'abord que, si l'on développe brutalement $[X_i, X_j]^k$ sous la forme $(X_i X_j - X_j X_i)^k$; on déduit de (1.5) une estimation de la forme

$$\| [X_i, X_j]^k u \| \leqq C^{k+1} (2k)\,!$$

qui est tout à fait insuffisante. La clef de la démonstration est donc de trouver par exemple une expression de : $[X_i, X_j]^k$ par un polynôme des X_i, mais permettant de meilleures estimations.

On a d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe et* $\mathcal{G}$ *son algèbre de Lie; soient* $X_1, \ldots, X_p$ *des générateurs de* $\mathcal{G}$. *Alors les* e^{tX_i}, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, *engendrent* G.

Démonstration. — Si $f = t^m X + O(t^{m+1})$, $g = t^n Y + O(t^{n+1})$ sont des fonctions analytiques à valeur dans $\mathcal{G}$, on a, d'après la formule de Campbell-Hausdorff (*cf.* [8]) :

$$e^f e^g e^{-f} e^{-g} = e^h \qquad \text{avec} \quad h = t^{m+n}[X, Y] + O(t^{m+n+1}).$$

Itérant ce résultat, on voit que, pour toute suite $i_1, \ldots, i_l$ de $[1, \ldots, p]$, il existe des indices $i(1), \ldots, i(N)$, des fonctions analytiques $F_1(t), \ldots, F_N(t)$ et en exposant entier k tels que

$$\prod_j e^{F_j(t) X_{i(j)}} = \exp\,(t^k [X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots] + O(t^{k+1}).$$

Dans ce résultat, on peut supposer k impair. Remplaçant t par $t^{1/k}$, on voit qu'il existe une fonction C^1 de la forme $\prod \exp F_j(t^{1/k}) X_{i(j)}$ tangente à :

$$t \to \exp\, t [X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots].$$

Or les $[X_{i_1} [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots]$ engendrent $\mathcal{G}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et il résulte alors du théorème des fonctions implicites que le sous-groupe engendré par les e^{tX_i}, $t \in \mathbb{R}$; $i = 1, \ldots, p$, contient un voisinage de l'élément neutre, donc est G entier puisque G est connexe. La proposition est ainsi démontrée.

On suppose de nouveau maintenant que $\mathcal{G}$ est stratifiée. Soit $\delta_t(t>0)$ la famille de dilatations définie sur $\mathcal{G}$ par

$$\delta_t(X)=t^j X \quad \text{si} \quad X\in\mathcal{G}_j \quad \text{et} \quad t>0. \tag{2.1}$$

On lui associe, *via* l'exponentielle, une famille d'automorphismes de G. $X_1, \ldots, X_p$ est la base de $\mathcal{G}_1$ et pour tout multi-indice $I=(i_1, \ldots, i_l)$ de $[1, \ldots, p]^l$, on notera pour alléger

$$X_I=[X_{i_1}[\ldots[X_{i_{l-1}}, X_{i_l}]\ldots].$$

La proposition admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. — *Pour tout* I, *tel que* $|I|\leqq r$, *il existe* N *tel que, pour tout* t *dans* $\mathbb{R}$, *on ait :*

$$e^{t^{|I|}X_I}=g_1(t)\ldots g_N(t), \tag{2.2}$$

avec

$$g_j(t)=e^{tY_j} \text{ et } Y_j \text{ appartenant à } \mathbb{R}\,X_i \text{ pour un } i\in[1, \ldots, p]. \tag{2.3}$$

D'après la proposition, pour $t=1$, on a

$$e^{X_I}=e^{Y_1}\ldots e^{Y_N}. \tag{2.4}$$

On applique δ_t à (2.4) pour $t>0$ et on obtient :

$$\delta_t(e^{X_I})=e^{t^{|I|}X_I}=\delta_t(e^{Y_1}\ldots e^{Y_N})=e^{tY_1}\ldots e^{tY_N}$$

et donc (2.2) pour $t\geqq 0$.

Chaque membre de (2.2) dépendant analytiquement de t, on en déduit (2.2) pour tout t.

COROLLAIRE 2.3. — *Pour tout* I *tel que* $|I|\leqq r$, *il existe* N *et* $Y_1, \ldots, Y_N$ *vérifiant* (2.3) *tels que, pour tout* k, *on ait, dans l'algèbre enveloppante* $\mathcal{U}(\mathcal{G})$:

$$\frac{X_I^k}{k!}=\sum_{k_1+\ldots+k_N=|I|k}\frac{Y_1^{k_1}\ldots Y_N^{k_N}}{k_1!\ldots k_N!} \tag{2.5}$$

Il suffit en effet d'identifier dans (2.2) les développements en série en t.

Remarque 2.4. — *L'identité* (2.5) *passe bien entendu aux représentations de* $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

C'est ce qu'on utilisera dans la suite, en considérant les éléments X_i *de* $\mathcal{G}_1$ *comme des champs de vecteurs dans* Ω.

Démonstration du théorème 1.3. — Soit u vérifiant (1.5). Compte tenu de $(C.H.)_r$ et du théorème (1.2), il suffit de montrer l'existence, pour tout compact K et tout multi-indice I de longueur inférieure ou égale à r, d'une constante $C_{I,K}$ telle que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on ait

$$\|X_I^k u\|_{L^2(K)}\leqq C_{I,K}^{k+1}\,k! \tag{2.6}$$

On pose dans (2.3) :

$$Y_i = \lambda_i X_{j(i)} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N \text{ et avec } j(i) \in [1, \ldots, p].$$

D'après (2.5), on a

$$\frac{X_1^k u}{k!} = \sum_{k_1 + \ldots + k_N = |I| k} \frac{\lambda_1^{k_1} X_{j(1)}^{k_1} \ldots \lambda_N^{k_N} X_{j(N)}^{k_N} u}{k_1 ! \ldots k_N !}. \tag{2.7}$$

D'après (1.5), on déduit de (2.7), la majoration

$$\frac{\| X_1^k u \|}{k!} \leqq C_K^{|I|k+1} \sum_{k_1 + \ldots + k_N = |I| k} \frac{(|I|k)! |\lambda_1|^{k_1} \ldots |\lambda_N|^{k_N}}{k_1 ! \ldots k_N !},$$

D'où

$$\frac{\| X_1^k u \|}{k!} = C_K^{|I|k+1} (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_N|)^{|I|k}. \tag{2.8}$$

Prenant

$$C_{I,K} = \sup (C_K, C_K^{|I|} (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_N|)^{|I|}),$$

on déduit (2.6) de (2.8). Le théorème (1.3) est ainsi démontré.

Remarque 2.5. — *Dans le cas ou* $r = 2$, *on peut démontrer le théorème* (1.3), *en utilisant à la place de* (2.5), *la formule*

$$(\operatorname{ad} X)^k Y^k = k! [X, Y]^k \tag{2.9}$$

où on a posé pour A *dans* $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. $(\operatorname{ad} X) A = [X, A]$.

Remarque 2.6. — *Vecteurs analytiques d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie stratifiée.*

On renvoie à [7] pour les définitions. On peut démontrer exactement comme le théorème 1.3 et compte tenu d'un théorème de R. Goodman [7] le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Soit* π *une représentation unitaire d'un groupe connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie stratifiée* $\mathcal{G}$ *engendrée par* $X_1, \ldots, X_p$.

Alors u est un vecteur analytique pour π *si et seulement si u est un vecteur* C^∞ *qui vérifie, pour une constante* C *convenable*

$$\| \pi(X^\alpha) u \|_{\mathcal{H}_\pi} \leqq C^{|\alpha|+1} |\alpha| !$$

où $\mathcal{H}_\pi$ *désigne l'espace de la représentation.*

Remarque 2.8. — *Itérés Gevrey.*

Il est montré dans [2] que le théorème (1.2) est encore vrai dans les classes de Gevrey G^s. Le théorème suivant se démontre comme le théorème (1.3) :

THÉORÈME 2.9. — *Sous les hypothèses du théorème* (1.3), *soit u une fonction* C^∞ *sur* Ω *telle que, pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une constante* C_K *strictement positive, telle que l'on ait, pour tout* α,

$$\|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s \qquad (\text{avec } s \geqq 1) \tag{2.10}$$

alors u est dans $G^{1+(s-1)r}(\Omega)$.

En calquant la démonstration du théorème (1.2) de G. Métivier [10], il est possible de démontrer que, si le système de champs X_i n'est pas elliptique en un point x_0, on peut construire, pour tout $s>1$, pour tout $s'<2s-1$, une fonction C^∞ u vérifiant (2.10) et qui n'est pas dans $G^{s'}$. Le théorème (2.9) est donc optimal pour $r=2$.

3. Application

Sur une variété analytique réelle M de dimension $2n-1$, on considère $(2n-1)$ champs indépendants $X_1, \ldots, X_{2n-2}$, T à coefficients analytiques, avec la propriété que la matrice $C_{jk}(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_{2n-1})$ donnée par

$$[X_j, X_k] = C_{jk}(x)\,T \quad (\text{mod } \{X_j\}) \tag{3.1}$$

satisfait à

$$\det(C_{jk}(x)) \neq 0 \tag{3.2}$$

près d'un point x_0 dans M.

Ces hypothèses sont celles prises par D. S. Tartakoff dans [12]. On va déduire du théorème 1.3, le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $X_1, \ldots, X_{2n-2}$ *des champs sur* M *vérifiant* (3.1) *et* (3.2) *et u une fonction* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* x_0 *dans* M *vérifiant : pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une constante* $C_K>0$ *telle que l'on ait, pour tout* α :

$$\|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1}|\alpha|! \quad (^1), \tag{3.3}$$

alors u est analytique dans Ω.

Démonstration. — On observe que l'inégalité (3.3) est stable par un changement de coordonnées analytiques réelles. Rappelons le lemme suivant démontré par exemple dans [5] (lemme 2.6).

LEMME 3.2. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_p)$ *un système de p champs analytiques définis sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *et u une fonction* C^∞ *sur* Ω *vérifiant* (3.3). *Soit* $(Y_1, \ldots, Y_q)$ *un système de q champs définis par*

$$Y_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ji} X_i, \qquad j=1, \ldots, q.$$

(1) On suppose qu'on a choisi une densité partout différente de 0 pour définir L^2. Mais les hypothèses ne dépendent pas de ce choix.

avec $a_{i,j}$ analytique dans Ω. Alors on a :
pour tout compact K de Ω, il existe une constante $C_K > 0$ telle que l'on ait, pour tout α,

$$\| Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha| ! \tag{3.4}$$

Il résulte du théorème classique de Darboux (comme cela a été observé par A. Dynin [6] et utilisé par D. S. Tartakoff [12]), qu'il existe localement des coordonnées analytiques (x, y, t) et des champs Y_j tels que l'on ait dans ces coordonnées

$$Y_j = \sum_{i=1}^{2n-2} a_{ji} X_i, \qquad j = 1, \ldots, 2n-2 \quad \text{avec} \quad a_{ji} \text{ analytique}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} Y_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j} - x_j \dfrac{\partial}{\partial t} & \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ Y_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \text{pour} \quad j = n, \ldots, 2n-2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Compte tenu du lemme, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où les champs Y_j vérifient (3.6). Dans ce cas, on peut appliquer le théorème 1.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et G. Métivier, *Caractérisation de l'analyticité et itérés d'opérateurs hypoelliptiques de type principal* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1979-1980, exposé n° 12).

[2] P. Bolley, J. Camus et C. Mattera, *Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1978-1979, exposé n° 13).

[3] F. Browder, *Real Analytic Functions on Product Spaces and Separate Analyticity* (*Canadian J. Math.*, vol. 13, 1961, p. 650-656).

[4] M. Damlakhi, *Analyticité et itérés d'opérateurs pseudo-différentiels* (*J. Math. Pures et Appl.*, vol. 58, 1979, p. 63-74).

[5] M. Derridj et C. Zuily, *Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander* (*J. Math. Pures et Appl.*, vol. 52, 1973, p. 309-336).

[6] A. Dynin, *Pseudodifferential Operators on Heisenberg Groups*, Éditions du C.I.M.E., 1977.

[7] R. Goodman, *Analytic and Entire Vectors for Representations of Lie Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 143, 1969, p. 55-76).

[8] G. Hochschild, *The Structure of Lie Groups*, Holden day Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1965.

[9] L. Hormander, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations* (*Acta Math.*, vol. 119, 1967, p. 147-171).

[10] G. Métivier, *Propriété des itérés et ellipticité* (*Comm. in P.D.E.*, t. 3, 1978, p. 827).

[11] E. Nelson, *Analytic Vectors* (*Ann. of Maths*, vol. 70, n° 3, 1959, p. 572-615).

[12] D. S. Tartakoff, *The Local Real Analyticity of Solutions to and -Neumann Problem* (*Reprint et Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, vol. 75, n° 7, 1978, p. 3027-3028).

[13] G. B. Folland, *Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Lie Groups* (*Ankiv för Mat.*, vol. 13, n° 2, 1975, p. 161-207).

(Manuscrit reçu le 15 février 1980
révisé le 5 mars 1980.)

M. Damlakhi, Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques, 91405 Orsay.

B. Helffer, Université de Nantes,
Département de Mathématiques, 44072 Nantes.

ON THE UNIQUENESS OF THE CAUCHY PROBLEM

M. DAMLAKHI *C. ZUILY*

§.1. INTRODUCTION

In [2] and [5] several sufficient conditions for the uniqueness of the Cauchy problem concerning a differential operator with characteristics of constant multiplicity have been given. These conditions involved the subprincipal symbol. In this work we show that, in some cases, the subprincipal symbol can be replaced by lower order terms. More precisely in $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,t)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ let us consider the differential operator

$$(1.1)\qquad P = P(x,t\ ;\ D_x, D_t) = D_t^m + a_{m-1}(x,t)D_t^{m-1} + \ldots + a_{m-j+1}(x,t)D_t^{m-j+1} + \sum_{|\alpha|+\beta \leqslant m-j} a_{\alpha\beta}\, D_x^\alpha\, D_t^\beta$$

where $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$, m and j are integers with $m > j \geqslant 1$.

We will prove the following

Theorem : Let P be defined by (1.1) and V a neighborhood of the origin. Let us suppose that

$$(i)\qquad \begin{cases} a_{m-k} \in L^\infty(V)\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant j-1\ ,\ a_{\alpha\beta} \in L^\infty(V), & |\alpha| + \beta \neq m-j\ , \\ a_{\alpha\beta} \in C^\infty(V), & |\alpha| + \beta = m - j\ . \end{cases}$$

$$(ii)\qquad \begin{cases} \text{If } m \text{ is even} : \forall\ \xi \in S^{n-1}, \sum_{|\alpha|=m-j} a_{\alpha,o}(0,0)\xi^\alpha \notin \mathbb{R}^- = \{\lambda\ :\ \lambda \leqslant 0\} \\ \text{If } m \text{ is odd} : \forall\ \xi \in S^{n-1}, \sum_{|\alpha|=m-j} a_{\alpha,o}(0,0)\xi^\alpha \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Then, there exists a neighborhood W of the origin in wich every $u \in C^\infty(V)$ satisfying

$$\begin{cases} P\,u = 0 \quad \text{in } V \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u_{|t=o} = 0\ , \quad k = 0,\ 1\ \ldots\ ,\ m-1 \end{cases}$$

vanishes.

To see that condition (ii) is sharp, let us consider the operator

$$P_o = D_t^m + \sum_{|\alpha| \leq m-j} b_\alpha D_x^\alpha$$

where b_α are complex constants and for example m is even. Suppose that there exists $\xi_o \in S^{n-1}$ such that $\sum_{|\alpha|=m-j} b_\alpha \xi_o^\alpha \in \mathbb{R}_*^-$. Take $\alpha_o \in \mathbb{N}^n, |\alpha_o| = m-j$, with $\xi_o^{\alpha_o} \neq 0$ and put $P_1 = D_x^{\alpha_o}$. It is easy to see that P_1 is not weaker than P_o. The corollary 3.2 of [1] implies the existence of a C^∞ function a(x,t), flat on t = 0, such that $P = P_o + a P_1$ does not possess the uniqueness property. Now, $P = D_t^m + \sum_{|\alpha|=m-j} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha$ with $\sum_{|\alpha|=m-j} a_\alpha(0,0)\xi_o^\alpha \in \mathbb{R}_*^-$.

§.2. PROOF OF THE THEOREM

The classical Holmgren transformation reduces the problem to the case when supp $u \subset \{(x,t) : t \geq A|x|^2\}$. The operator and the conditions (i), (ii) remain invariant.

The proof of the theorem is based on a Carleman estimate for wich we introduce the following notation. For $s \in \mathbb{R}$ and $\ell \in \mathbb{N}$ we put

$$(2.1) \qquad |||u|||^2_{(s,\ell)} = \sum_{j=0}^{\ell} \int_0^T e^{\gamma(t-T)^2} \| D_t^j u \|^2_{H^{s-j}(\mathbb{R}^n)} \, dt .$$

Proposition 2.1 : Let P be defined by (1.1). Under the hypotheses (i) and (ii) of the theorem, there exists positive constants C, γ_o, T_o, r such that for $\gamma \geq \gamma_o$, $T \leq T_o$ and $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ with supp $u \subset \{0 \leq t \leq T, |x| \leq r\}$.

$$(2.2) \qquad |||u|||^2_{(m-(j+1),m-1)} \leq \frac{C}{\gamma} |||P u|||^2_{(0,0)} .$$

The first step is the following

Lemma 2.2 : ([2])

Let us consider $p_o(x,t;\xi,\tau) = \tau^m + \sum_{|\alpha|+\beta=m-j} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi^\alpha \tau^\beta$. *There exists* $R > 0$ *such that for* $|\xi| \geq R$

$$(2.3) \qquad p_o(x,t;\xi,\tau) = \prod_{q=1}^{m} (\tau - \lambda^{(q)}(x,t;\xi))$$

$$(2.4) \qquad \lambda^{(q)}(x,t;\xi,\tau) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^{(q)}(x,t;\xi)\ |\xi|^{1-\frac{kj}{m}} \quad , \ q = 1,\dots,m$$

where $\nu_k^{(q)}$ *is homogeneous of degree zero and*

$$(2.5) \qquad \nu_1^{(q)}(x,t;\xi) = \left(- \sum_{|\alpha|=m-j} a_{\alpha,o}(x,t)\ \left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)^{\alpha} \right)^{1/m} \quad , \ q = 1,\dots,m \ .$$

Proof

We look for the roots of $p_o(x,t;\xi,\tau) = 0$; putting $\tau = |\xi|\tilde{\tau}$, we have to solve $\tilde{\tau}^m = \frac{1}{|\xi|^j}\psi(x,t;\xi,\tau)$ where $\psi = - \sum_{|\alpha|+\beta=m-j} a_{\alpha\beta}(x,t)\ \left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)^{\alpha} \tilde{\tau}^{\beta}$ is a C^{∞} function of (x,t) and has degree zero with respect to ξ. The condition (ii) of the theorem says that $\psi(0,0;\xi,0) \neq 0$ so $\tilde{\tau} = |\xi|^{-j/m}\ [\psi(x,t;\xi,\tau)]^{1/m}$. The Lemma then follows from the classical Lagrange formulas.

Let us now introduce some notations.

For $1 \leqslant q \leqslant m$, we denote by $\partial^{(q)}$ the pseudo differential operator with symbol $\tau - \lambda^{(q)}(x,t;\xi)$ and if $I = (i_1,\dots,i_p)$ is a multi-index we put $|I| = p$ and $\partial^I = \partial^{(i_1)} o \dots o \partial^{(i_p)}$. (If $|I| = 0$, ∂^I = Identity). Let A and B two p.d.o with symbols a and b ; $A \otimes B$ will be the p.d.o with symbol a.b and $P^I = \partial^{(i_1)} \otimes \dots \otimes \partial^{(i_p)}$. If $\sigma \in \mathbb{R}$ and $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is a sequence of real numbers with $\lim_{j\to\infty} r_j = +\infty$, we denote by $T(\sigma)$ the set of symbols $a(x,t;\xi)$ such that $t \to a(x,t;\xi)$ is C^{∞} from $t \in [0,T_o]$ to the set of symbols on $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ wich have an asymptotic developpement in homogeneous function in ξ of degree $\sigma - r_j$. $OPT(\sigma)$ will denote the set of p.d.o with symbol in $T(\sigma)$. We have the

Proposition 2.3 : Let $P_o = D_t^m + \sum_{|\alpha|+\beta=m-j} a_{\alpha\beta} D_x^{\alpha} D_t^{\beta}$. *Then for* $|\xi| \geqslant R$

$$(2.6) \qquad P_o = \partial^{(1)} o \dots o \partial^{(m)} + \sum_{|J|\leqslant m-1} a_J \partial^J$$

where $a_J \in OPT\left(\left[\frac{m-|J|}{2}\right]\ (1 - \frac{j}{m})\right)$; ([x] *denotes the entire part of* x).

This result will follow from the Lemma 2.2 and the

Lemma 2.4 : Let $Q \in OPT(r)$ *and* $I = (i_1,\dots,i_p) \subset \{1,2,\dots,m\}$. *There exists* $Q_{I,J} \in OPT\left(\left[\frac{|I|-|J|}{2}\right]\ (1 - \frac{j}{m}) + r\right)$

such that :

$$(2.7) \qquad Q \otimes P^I = Q \circ \partial^I + \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|<|I|}} Q_{I,J} \circ \partial^J$$

Proof

a) For every $R \in OPT(r)$ and $I \subset \{1,2,\ldots,m\}$ there exists $r_{I,J} \in T\left(r + [\frac{|I|-|J|}{2}](1-\frac{j}{m})\right)$ such that :

$$(2.8) \qquad \sigma(R \circ \partial^I) = \sigma(R)\,\sigma(P^I) + \sum_{\substack{|J|<|I| \\ J \subset I}} r_{I,J}\,\sigma(P_J)$$

This is obvious for $|I| = 1$. Put $\partial^I = \partial \circ \partial^{I_o}$; we have

$$R \circ \partial^I = R \circ \partial \circ \partial^{I_o} = [R,\partial] \circ \partial^{I_o} + \partial \circ R \circ \partial^{I_o}$$

By the induction

$$\sigma([R,\partial] \circ \partial^{I_o}) = a_r\ \sigma(P^{I_o}) + \sum_{|J|<|I_o|} a_{I_o,J}\,\sigma(P_J)$$

where $a_{I_o,J} \in T([\frac{|I_o|-|J|}{2}](1-\frac{j}{m}) + r) \subset T([\frac{|I|-|J|}{2}](1-\frac{j}{m}) + r)$ and $a_r \in T(r)$

On the other hand

$$\sigma(\partial \circ R \circ \partial^{I_o}) = \sigma(\partial)\,\sigma(R \circ \partial^{I_o}) + \sum_{|\alpha|+k\neq o} \frac{1}{\alpha!k!}\,\partial_\xi^\alpha\,\partial_\tau^k\,\sigma(\partial)\,D_x^\alpha\,D_t^k\,\sigma(R \circ \partial^{I_o}) = ① + ②$$

The induction implies

$$① = \sigma(\partial)\,\sigma(R)\,\sigma(P^{I_o}) + \sum_{|J|<|I_o|} r_{I_o J}\,\sigma(\partial)\,\sigma(P^J)$$

The first term is precisely $\sigma(R)\,\sigma(P^I)$. In the next one we have

$$r_{I_o,J} \in T\left(r + [\frac{|I_o|-|J|}{2}]\ (1-\frac{j}{m})\right) = T\left(r + [\frac{|I|-(|J|+1)}{2}]\ (1-\frac{j}{m})\right)$$

Now, since we have $\sigma(\partial) = \tau - \lambda$, $\lambda \in T(1-\frac{j}{m})$ we can write :

$$② = c^{te}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sigma(R \circ \partial^{I_o}) + \sum_{\alpha\neq o} c_{\alpha k}\,(\frac{\partial}{\partial \xi})^\alpha \lambda\ D_x^\alpha\,\sigma(R \circ \partial^{I_o}) = ③ + ④$$

Using (2.8) with I_o we get

$$③ = a_r\,\sigma(P^{I_o}) + \sum_{|J|=|I_o|-1} b_{J,r}\,\sigma(P^J) + \sum_{|J|\leq|I_o|} \tilde{r}_{I_o,J}\,\sigma(P^J) +$$

$$+ \sum_{|J|\leq|I_o|} r_{I_o,J} \cdot \sum_{|L|=|J|-1} \sigma(P^L)$$

where $a_r \in T(r)$, $b_{J,r} \in T(r+1-\frac{j}{m})$, $\tilde{r}_{I_o,J} \in T\Big(r + [\frac{|I_o|-|J|}{2}]\,(1-\frac{j}{m})\Big)$ and

$r_{I_o,J} \in T\Big(r + [\frac{|I_o|-|J|}{2}]\,(1-\frac{j}{m})\Big)$.

We get

$$③ = \sum_{|J|\leq|I|} r_{I,J}\,\sigma(P^J) \quad , \quad r_{I,J} \in T\Big(r + [\frac{|I|-|J|}{2}]\,(1-\frac{j}{m})\Big).$$

Using (2.8) we can write

$$④ = \sum_{\alpha\neq o} q_{1-j/m-|\alpha|}\,D_x^\alpha(\sigma(R)\,\sigma(P^{I_o})) + \sum_{\alpha\neq o} q_{1-j/m-|\alpha|}\,D_x^\alpha \sum_{|J|\leq|I_o|} r_{I_o,J}\,\sigma(P^J) = ⑤ + ⑥.$$

Using the Leibniz formula we see that ⑤ is a sum of terms $\sigma(P^J)$ with $|J| \leqslant |I_o| - 1$. More precisely

$$⑤ = \sum_{k=1}^{|I_o|} \sum_{|J|=|I_o|-k} \Big(\sum_{|\alpha|\geqslant k} q_{\alpha,k,J}\Big)\,\sigma(P^J)$$

where $q_{\alpha,k,J} \in T\Big(r+1-\frac{j}{m}-|\alpha|+k(1-\frac{j}{m})\Big)$. There exists $q_{k,J} \in T(r+1-\frac{j}{m})$ such that $q_{k,J} \sim \sum_{|\alpha|\geqslant k} q_{\alpha,k,J}$. Then

$$⑤ = \sum_{|J|\leq|I_o|} q_{I_o,J}\,\sigma(P^J) \quad \text{with } q_{I_o,J} \in T(r+1-\frac{j}{m}).$$

We use the same technique for ⑥; here the coefficient of $\sigma(P^L)$ for $|L| \leqq |I_o| - 1$ belongs to $T\Big(r + [\frac{|I_o|-|L|+1}{2}]\,(1-\frac{j}{m})\Big)$.

b) Using (2.8) we can prove the Lemma 2.4 :

$$(2.9)\quad Q \circ \partial^I = Q \otimes P^I + \sum_{|J|<|I|} Q_{I,J} \circ \partial^J \quad , \quad Q_{I,J} \in OPT\left(r + [\tfrac{|I|-|J|}{2}] \ (1 - \tfrac{j}{m})\right) .$$

This formula is true for $|I| = 1$; suppose it is true for $|I| - 1$. By (2.8) we have :

$$\sigma(Q \circ \partial^I) = \sigma(Q)\ \sigma(P^I) + \sum_{\substack{|J|<|I| \\ J\subset I}} \sigma(Q_{I,J} \otimes P^J)$$

$$\sigma(Q \circ \partial^I) = \sigma(Q \otimes P^I) + \sum_{|J|<|I|} \left\{ \sum_{K\subset J} Q_{I,J,K} \circ \partial^K \right\}$$

where $Q_{I,J,K} \in OPT\left(r + [\tfrac{|I|-|J|}{2}] \ (1 - \tfrac{j}{m}) + [\tfrac{|J|-|K|}{2}] \ (1 - \tfrac{j}{m})\right)$. The proof is complete.

The Carleman estimate (2.2) will follow from a repeated application of the following estimate wich is proved along the same lines that Theorem 3.1 of [5]. (see also [3]). Let us remark that thanks to the hypothesis (ii) and (2.5) we have :

$$\partial^{(q)} = D_t - \nu_1^{(q)}\ (x,t;D_x)\ |D_x|^{1-j/m} + Q$$

where $Q \in OPT\ (1 - \frac{2j}{m})$ and $\operatorname{Im} \nu_1^{(q)}\ (x,t;\xi) \neq 0$.

Proposition 2.5 : There exists positive constants C, γ_o, T_o, r, R *such that for* $\gamma \geqslant \gamma_o$, $T \leqslant T_o$

$$(2.10)\qquad |||u|||^2_{(0,0)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\ |||\partial^{(q)}\ u|||^2_{(0,0)} \quad , \quad q = 1,\ldots,m \ ,$$

for every $u \in C^\infty$ *with supp* $u \subset \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant r\}$ *and supp* $\hat{u}\ (\xi,t) \subset \{|\xi| \geqslant R\}$.

From this result we deduce the following

Proposition 2.6 : Let I be a permutation of $(1,2,\ldots m)$. *There exists positive constants* C, R, r, T_o, γ_o *such that for* $T \leqslant T_o$, $\gamma \geqslant \gamma_o$ *and* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *with supp* $u \subset \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant r\}$ *and supp* $\hat{u}\ (\xi,t) \subset \{|\xi| \geqslant R\}$ *we have for* $1 \leqq \ell \leqq m$:

$$(2.11)\qquad \sum_{p=o}^{\ell-1} \sum_{\substack{|J|=m-\ell \\ J\subset I}} |||D_t^p\ \partial^J u|||^2_{(0,0)} + \sum_{\substack{|J|=m-\ell \\ J\subset I}} |||\partial^J u|||^2_{(\sigma,M_J)} \leqq \frac{C}{\gamma}\ |||\partial^I u|||^2_{(0,0)}$$

where $\sigma = (m - |J| - 1)\ \frac{m-j}{m}$, $M_J = m - |J| - 1$.

Proof

Let us consider the first term of the left hand side of (2.11). We will show, by induction on ℓ, that it is bounded by $\frac{c}{\gamma}\{|||\partial^I u|||^2_{(0,0)} + \sum_{\substack{|K|\leq m-1 \\ K\subset I}} |||\partial^K u|||^2_{(0,0)}\}$. This will prove a part of (2.11) if γ is big enough.

For $\ell = 1$, we write, using Proposition 2.5 with $q \in I \setminus J$:

$$|||\partial^J u|||^2_{(0,0)} \leq \frac{c}{\gamma} |||\partial^{(q)}\ \partial^J u|||^2_{(0,0)} \tag{2.12}$$

and $J \cup \{q\}$ is a permutation of I. We then use the following fact (see [5] Lemma 2.8).

If L is a multi-index and $\tilde{L}$ a permutation of L we have :

$$\partial^L - \partial^{\tilde{L}} = \sum a_{L,\tilde{L}}\ \partial^K \tag{2.13}$$

where $a_{L,\tilde{L}} \in OPT(0)$ and $K \subset L$ with $|K| \leq |L| - 1$.

From (2.12) and (2.13) we get :

$$\sum_{|J|=m-1} |||\partial^J u|||^2_{(0,0)} \leq \frac{c}{\gamma}\left\{|||\partial^I u|||^2_{(0,0)} + \sum_{\substack{K\subset I \\ |K|\leq m-1}} |||\partial^K u|||^2_{(0,0)}\right\}$$

Let $|J| = m - (\ell+1)$, $\ell \geq 1$. There exists i_1, i_2 belonging to $I \setminus J$ with $i_1 \neq i_2$. For every $a \in OPT(0)$, $b \in OPT(1 - j/m)$ there exists (see [5] Lemma 2.4) α,β,γ in OPT(0) such that :

$$a \circ D_t + b = \alpha\partial^{(i_1)} + \beta\partial^{(i_2)} + \gamma \tag{2.14}$$

(The proof of (2.14) is easy. We just identify the symbols).

We have :

$$\sum_{p=0}^{\ell} |||D_t^p\ \partial^J u|||^2_{(0,0)} = |||\partial^J u|||^2_{(0,0)} + \sum_{q=0}^{\ell-1} |||D_t^{q+1}\partial^J u|||^2_{(0,0)} \leq |||\partial^J u|||^2_{(0,0)} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\ell-1} (|||D_t^q\ \alpha_1\partial^{(i_1)}\partial^J u|||^2_{(0,0)} + |||D_t^q\ \beta_1\partial^{(i_2)}\partial^J u|||^2_{(0,0)} + |||D_t^q\gamma\partial^J u|||^2_{(0,0)})$$

where α_1, $\beta_1 \in OPT(0)$. Using Leibniz formula we get

$$\sum_{p=0}^{\ell} |||D_t^p \partial^J u|||^2_{(0,0)} \leq \sum_{k=0}^{\ell-1} (|||D_t^k \partial^{J_1} u|||^2_{(0,0)} + |||D_t^k \partial^{J_2} u|||^2_{(0,0)} + |||D_t^k \partial^J u|||^2_{(0,0)}$$

where $|J_1| = |J_2| = |J| + 1 = m - (\ell+1) + 1 = m - \ell$.

By the same argument applied to $\sum_{k=0}^{\ell-1} |||D_t^k \partial^J u|||^2_{(0,0)}$ we prove that :

$$(2.15)\quad \sum_{p=0}^{\ell} |||D_t^p \partial^J u|||^2_{(0,0)} \leq \sum_{k=0}^{\ell-1} (|||D_t^k \partial^{J_1} u|||^2_{(0,0)} + |||D_t^k \partial^{J_2} u|||^2_{(0,0)}) +$$

$$+ \frac{c}{\gamma} |||\partial^{J_3} u|||^2_{(0,0)}$$

where $|J_3| = m - \ell$. We then apply the induction to the right hand side of (2.15). Let us consider now the second term in the left hand side of (2.11). We bound this term, using the induction, by $\frac{c}{\gamma} (|||\partial^I u|||^2_{(0,0)} + \sum_{\substack{L \subset I \\ |L| \leq m-1}} |||\partial^L u|||^2_{(\rho, M_L)})$ where

$\rho \leq (m-|L|-1) \frac{m-j}{m}$ and $M_L \leq m - |L| - 1$.

For $\ell = 1$ we use Proposition 2.5 with $\partial^{(i_o)}$, where $i_o \in I \setminus J$, and (2.13). Consider now $J \subset I$, $|J| = m-\ell$, $\ell \geq 2$, and i_1, $i_2 \in I \setminus J$, $i_1 \neq i_2$. Using (2.14), we get with $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$:

$$(2.16)\ |||\partial^J u|||^2_{(\lambda + \frac{m-j}{m}, \mu)} + |||\partial^J u|||^2_{(\lambda + \frac{m-j}{m}, \mu+1)} \leq c(\sum_{k=1}^{2} |||\partial^{J_k} u|||^2_{(\lambda,\mu)} + |||\partial^J u|||^2_{(\lambda,\mu)})$$

where $|J_k| = |J| + 1 = m-(\ell-1)$, $k = 1,2$.

Taking $\lambda = (m-|J|-2) \frac{m-j}{m}$, $\mu = m - |J| - 2$, and using the induction we bound the left hand side of (2.16) by :

$$(2.17)\quad \frac{C}{\gamma} \left\{ |||\partial^I u|||^2_{(0,0)} + \sum_{|L| \leq m-1} |||\partial^L u|||^2_{(\lambda',\mu')} \right\} + C\ |||\partial^J u|||^2_{(\lambda,\mu)} .$$

where $\lambda' \leq \lambda$, $\mu' \leq \mu$.

We then use the following fact

$$|||\partial^J u|||^2_{(\lambda,\mu)} \leq \frac{c}{\gamma} \; |||\partial^{(q)} \; \partial^J u|||^2_{(\lambda,\mu)} \tag{2.18}$$

where $q \in I \setminus J$, wich follows easily from Proposition 2.5. Now, by induction

$$|||\partial^{(q)} \; \partial^J u|||^2_{(\lambda,\mu)} \leq \frac{c}{\gamma} \left(|||\partial^I u|||^2_{(0,0)} + \sum_{|L| \leq m-1} |||\partial^L u|||^2_{(\lambda',\mu')} \right)$$

This inequality together with (2.18) and (2.17) complete the proof of Proposition 2.6.

Corollary 2.7 : There exists positives constants C, R, r, T_o, γ_o such that for $T \leq T_o$, $\gamma \geq \gamma_o$ and $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ supp $u \subset \{0 \leq t \leq T, |x| \leq r\}$, supp $\hat{u}(\xi,t) \subset \{|\xi| \geq R\}$

$$\sum_{p=0}^{m-1} |||D_t^p u|||^2_{(0,0)} + \sum_{|J| \leq m-1} |||\partial^J u|||^2_{(\sigma,M_J)} \leq \frac{c}{\gamma} \; |||P\,u|||^2_{(0,0)} \tag{2.19}$$

where $\sigma = (m-|J|-1)\,\frac{m-j}{m}$, $M_J = m-|J|-1$.

Proof

Proposition 2.3 implies that :

$$\partial^{(1)} o \ldots o \partial^{(m)} = P - \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{m-\ell} \, D_t^{m-\ell} - \sum_{|\alpha|+\beta<m-j} a_{\alpha\beta} \, D_x^\alpha \, D_t^\beta - \sum_{|J|<m} a_J \, \partial^J$$

$$\partial^{(1)} o \ldots o \partial^{(m)} = P - A - B - C$$

On the other hand

$$|||A\,u|||^2_{(0,0)} \leq c \sum_{p=1}^{m-1} |||D_t^p \, u|||^2_{(0,0)}$$

$$|||B\,u|||^2_{(0,0)} \leq c \; |||u|||^2_{(m-j-1,m-j-1)} \leq c \; |||u|||^2_{((m-1)\frac{m-j}{m},m-1)}$$

$$|||C\,u|||^2_{(0,0)} \leq \sum_{|J| \leq m-1} |||\partial^J u|||^2_{((m-|J|-1)\frac{m-j}{m},0)} \qquad \text{because}$$

$$\left[\frac{m-|J|}{2}\right] \left(1 - \frac{j}{m}\right) \leq (m-|J|-1)\left(1 - \frac{j}{m}\right) .$$

The inequality (2.19) follows from (2.11) if γ is big enough.

When the support of $\hat{u}(\xi,t)$ is contained in $\{|\xi| \leqslant R\}$ we have a better inequality. More precisely

$$|||u|||^2_{(m-1,m-1)} \leqq \frac{c}{\gamma} |||P\ u|||^2_{(0,0)} \tag{2.20}$$

Indeed let Q be a differential operator of order m with real simple characteristics of constant multiplicity. Using Calderon's theorem [3] we get :

$$|||u|||^2_{(m-1,m-1)} \leqslant \frac{c}{\gamma} |||Q\ u|||^2_{(0,0)} \tag{2.21}$$

Now if supp $\hat{u}(\xi,t) \subset \{|\xi| \leqslant R\}$ we have (see [2]) :

$$|||(P-Q)u|||^2_{(0,0)} \leqslant c(1+R)^m \sum_{\ell=1}^{m-1} |||D_t^\ell\ u|||^2_{(0,0)} \tag{2.22}$$

We get (2.20) from (2.21) and (2.22).

Proposition 2.1 follows from (2.19) and (2.20) by partition of unity (see [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hörmander :
Non uniqueness for the Cauchy problem ,
Lectures notes in Math. Springer Verlag n° 459, (1975), 36-72.

[2] W. Matsumoto :
Uniqueness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristic roots ,
J. Math. Kyoto Univers. 15-3 (1975), p. 479.

[3] L. Nirenberg :
Lectures on linear partial differential equations ,
Conference Board on Math. Science. Texas Univ. n° 17.

[4] K. Watanabe - C. Zuily :
On the uniqueness of the Cauchy problem for elliptic differential operators with smooth characteristics of variable multiplicity ,
Comm. in partial differential equations, 2(8), (1977), 831-855.

[5] C. Zuily
Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels ,
Journées d'équations aux dérivées partielles Saint Cast (1979) et article à paraître.

M.D and C.Z
Département of Mathematics
University of Paris XI
91405 ORSAY CEDEX - FRANCE

SOLUTIONS HÖLDERIENNES POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES DEGENERES

par M. DAMLAKHI

RESUME

On étudie l'action dans les espaces de Hölder sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, d'opérateurs du second ordre elliptiques à l'intérieur et dégénérant au bord à l'ordre un suivant la seule direction normale. On obtient en particulier un théorème d'isomorphisme ne faisant pas intervenir de conditions aux limites.

La méthode est inspirée par l'article de C. Goulaouic et N. Shimakura [4], qui utilisent une technique de perturbation pour obtenir des estimations a priori à partir de l'étude d'un modèle, puis un argument de continuité pour déduire l'existence dans un cas général à partir d'un cas particulier. L'étude du modèle se fait ici en utilisant un "changement de variables qui désingularise" l'opérateur (en augmentant la dimension).

I. HYPOTHESES ET ENONCES DES PRINCIPAUX RESULTATS

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de bord $\partial\Omega$ non vide. On définit sur Ω la métrique suivante :

$$m(x,y) = |x-y| + \left|\sqrt{d(x,\partial\Omega)} - \sqrt{d(y,\partial\Omega)}\right|$$

pour tout x, y dans Ω. Où $|x-y| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right)^{1/2}$ et $d(x,\partial\Omega)$ désigne la distance de x à $\partial\Omega$.

Pour $\mu \in]0,1[$, nous notons :

$$(1)\qquad \underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) \; ; \; \|u\|_{\mu} = \|u\|_{\infty} + \sup_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{(m(x,y))^{\mu}} < \infty \right\}$$

On écrit aussi $\|u\|_{\mu} = \|u\|_{\infty} + [u]_{\mu}$, où $\|u\|_{\infty} = \sup_{\Omega}|u|$ et

$$[u]_{\mu} = \sup_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{(m(x,y))^{\mu}}$$

plus généralement pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, on note :

$$(2)\qquad \underset{\sim}{C}^{k+\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) \; ; \; D^{\alpha}u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega}) \quad \text{pour} \quad |\alpha| \le k \right\}$$

muni de la norme naturelle. Les espaces $\underset{\sim}{C}^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ sont des espaces de Banach. La distance $m(x,y)$ est équivalente à la distance euclidienne sur tout compact de Ω et aussi pour des couples de points à même distance du bord; autrement dit lorsque Ω est assez régulier, $m(x,y)$ ne diffère de la métrique euclidienne qu'au voisinage du bord dans les directions transversales au bord; donc les espaces C^{μ} et C^{μ} ne diffèrent qu'au voisinage du bord $\partial\Omega$ et " dans les directions transverses au bord".

On note ici $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $D_j = -i\partial_{x_j}$ et $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction réelle sur $\mathbb{R}^n$, positive sur Ω et équivalente à la distance au bord. C'est à dire :

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ \varphi(x) > 0 \}$$
$$\partial\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ \varphi(x) = 0 \} \text{ et } d\varphi \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

on suppose que $\bar{\Omega}$ et φ de classe C^{∞} en fait pour les problèmes de régularité $\underset{\sim}{C}^{\mu}$ considérés ci-dessus, il suffit de supposer Ω et φ de classe $\underset{\sim}{C}^{2+\mu}$, mais un changement de variable conservant la régularité des coefficients des opérateurs différentiels considérés permet tout de suite de supposer plus de régularité sur Ω et φ sans restreindre la généralité.

On note grad $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ et on pose

$$\Lambda_{jk} = \varphi_k D_j - \varphi_j D_k \quad \text{pour } j,k = 1,\dots,n.$$

les champs de vecteurs (Λ_{jk}) constituent un système elliptique sur le bord de Ω. On vérifie que Λ_{jk} est formellement auto-adjoint et que $\sum_{1 \leq j,k \leq n} \Lambda_{jk}^2 \Big|_{\partial\Omega}$ est elliptique sur $\partial\Omega$.

On considère des opérateurs sur Ω de la forme

(3) $$\mathcal{A} = -\varphi \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha} \Lambda^{\beta} + \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_{x_j} + a_0$$

où α et β décrivent l'ensemble $\{(j,k)\ 1 \leq j < k \leq n\}$.

On suppose

(4) Les coefficients de $\mathcal{A}$ sont dans $\underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$, $a_{jk} = a_{kj}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ et les a_{jk} et $b_{\alpha\beta}$ sont tous réels.

(5) L'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique dans Ω (non uniformément) et $\sum_{\alpha,\beta} b_\alpha \Lambda^\alpha \Lambda^\beta \Big|_{\partial\Omega}$ est elliptique sur le bord $\partial\Omega$.

(6) La partie du premier ordre dans $\mathcal{A}$ est sur le bord de la forme $\sum_\alpha c_\alpha \Lambda^\alpha - \sum_{k,j} a_{jk}\ \varphi_k\ \partial_{x_j}$.

Un exemple d'opérateurs $\mathcal{A}$ est (sous forme variationnelle) :

$$\mathcal{A}_o = -\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \Lambda_{jk}^2 \tag{7}$$

Lorsque les coefficients $a_{j,k}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont de plus dans $C^1(\Omega)$, on peut écrire $\mathcal{A}$ sous une forme variationnelle et pour Re a_o assez grand, on pourra associer à $\mathcal{A}$ un isomorphisme de l'espace :

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in L^2(\Omega) ;\ \sqrt{\varphi}\, D_j u \in L^2(\Omega),\ \Lambda_{jk} u \in L^2(\Omega) \text{ pour } 1 \leq j < k \leq n \right\} \tag{8}$$

sur son dual $\mathcal{V}'$ (en identifiant $L^2(\Omega)$ et son dual).

L'hypothèse (5) ci-dessus est nécessaire pour aboutir à une telle formulation variationnelle; dans une grande mesure, la méthode utilisée ci-dessous et les résultats obtenus pourraient être étendus à des opérateurs elliptiques dégénérés plus généraux (analogues à ceux de [4] en les directions transversales au bord). C'est seulement sur l'étude du modèle que la méthode utilisée ici devrait être remplacée par une étude précise de l'action des noyaux de Green associés dans les espaces $\tilde{C}^\mu$.

Nous notons, pour $\mu \in]0,1[$ et φ comme ci-dessus

$$C_\varphi^{2+\mu} = \left\{ u \in \tilde{C}^{1+\mu}(\bar\Omega) ;\ \varphi u \in \tilde{C}^{2+\mu}(\bar\Omega) \text{ et } \Lambda_{jk}^2 u \in \tilde{C}^{\mu}(\bar\Omega) \right\} \tag{9}$$

muni de la norme naturelle notée $\| \ \|_{2+\mu,\varphi}$.

Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats obtenus et d'abord une estimation a priori analogue à celle de Schauder pour des opérateurs uniformément elliptiques.

Théorème 1 : On considère l'opérateur $\mathcal{A}$ donné par la formule (3) vérifiant les hypothèses (4), (5) et (6). Alors il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}$

$$\|u\|_{2+\mu,\varphi} \leq C\left(\|\mathcal{A}u\|_{\mu} + \|u\|_{\mu}\right) \tag{10}$$

de plus, Ω et φ étant fixés, la constante C dans (10) peut être choisie indépendante des coefficients de $\mathcal{A}$ pourvu que ceux-ci restent dans un borné de $\mathcal{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$, et que les constantes d'ellipticité restent minorées par un nombre positif.

Pour obtenir une telle estimation, nous nous ramenons par localisation, difféomorphisme et perturbation au cas d'un modèle sur $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n > 0\}$ de la forme suivante :

$$\mathcal{L} = -\partial_{x_n} x_n \partial_{x_n} - \Delta_{x'}, \quad \text{où} \quad \Delta_{x'} = \sum_{j=1}^{n-1} \partial^2_{x_j} \tag{11}$$

pour lequel nous établissons d'abord les inégalités $\mathcal{C}^{\mu}$.

Théorème 2 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (3), (4), (5) et (6). Supposons les coefficients de $\mathcal{A}$ réels et $a_o > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C_{\varphi}^{2+\mu}$ sur $\mathcal{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$.

Théorème 3 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifient les hypothèses (3), (4) (5) et (6). Supposons les coefficients a_{jk} et $b_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{A}$ dans $C^1(\bar{\Omega})$. Il existe alors $C > 0$ tel que, pour $\mathrm{Re}\, a_o > C$, l'opérateur $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C_{\varphi}^{2+\mu}$ sur $\mathcal{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$.

Nous avons laissé en remarque la régularité höldérienne d'ordre supérieur et les applications à des problèmes elliptiques dégénérés non linéaires.

II. INEGALITES A PRIORI DANS LES ESPACES $\mathcal{C}^{\mu}$ (DEMONSTRATION DU THEOREME 1) :

Nous montrons ici un résultat apparemment plus faible que le théorème 1, à savoir :

Proposition 1 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant (3), (4) (5) et (6). Il existe $C > 0$ tel que l'on ait pour tout $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}$,

$$(12)\qquad \|u\|_{2+\mu,\varphi} \le C\left(\|Au\|_{\mu} + \|\varphi u\|_{1+\mu} + \sum_{1\le j<k\le n} \Big\|\bigwedge_{jk} u\Big\|_{\mu} + \|u\|_{\mu}\right)$$

De plus la constante C peut être choisie indépendante de A pourvu que soit vérifiée la même uniformité que dans le théorème 1. Nous montrons d'abord que la compacité de l'injection de $C^{\alpha}(\bar\Omega)$ dans $C^{\beta}(\bar\Omega)$ pour $0 < \beta < \alpha$ implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C_\epsilon > 0$ tel que l'on ait pour tout $u \in C^{\mu+2}_{\varphi}$,

$$(13)\qquad \sum_{1\le j<k\le n} \Big\|\bigwedge_{jk} u\Big\|_{\mu} + \|\varphi u\|_{1+\mu} + \|u\|_{\mu} \le \epsilon \|u\|_{2+\mu,\varphi} + C_\epsilon \|u\|_{\mu}$$

Le théorème 1 est alors une conséquence immédiate de (13) et de la proposition 1.

1) Pour prouver la proposition 1, nous allons commencer par une localisation : soit $(\Omega_j)_{j=0,\dots,N}$ un recouvrement ouvert de $\bar\Omega$ et $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ tels que :

$$\Omega_0 \subset \Omega \quad , \qquad \bar\Omega \subset \bigcup_{j=0}^{N} \Omega_j$$

$$\varphi_j \in C^{\infty}_{0}(\Omega_j) \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{N} \varphi_j = 1 \quad \text{sur} \quad \bar\Omega \ .$$

pour montrer (12), pour $u \in C^{2+\mu}_{\varphi}$, il suffit de la faire pour chaque $\varphi_j u$; pour $\varphi_0 u$ cela résulte des estimations classiques de Schauder pour les opérateurs uniformément elliptiques; pour $\varphi_j u$ avec $j \in \{1,\dots,N\}$, nous sommes ramenés pour un difféomorphisme θ , tel que $(\varphi \circ \theta)(x) = x_n$ à un problème analogue dans $\mathbb{R}^n_+$.

Pour $\omega \subset \mathbb{R}^n_+$, nous notons $\underline{\omega}$ sans adhérence dans $\omega \cup \{(x',0) \ ; \ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$,

$$C^{2+\mu}_{x_n}(\bar\omega) = \Big\{ u \in C^{1+\mu}(\bar\omega) \ ; \ x_n u \in C^{2+\mu}(\bar\omega) \text{ et } \partial_{x_j}\partial_{x_k} u \in C^{\mu}(\bar\omega) \text{ pour } j,k = 1,2,\dots,n-1 \Big\}$$

muni de la norme du graphe notée $\|\ \|_{2+\mu,x_n,\omega}$, nous notons aussi :

$$\omega_R = \Big\{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \ ; \ |x'| + \sqrt{x_n} < R \Big\} \ .$$

Des hypothèses faites sur A , il résulte que cet opérateur est transformé dans le difféomorphisme θ en un opérateur sur $\mathbb{R}^n_+$ de la forme :

(14)
$$\tilde{A} = -x_n \sum_{1 \le j \le n} \tilde{a}_{jn}(x)\, \partial_{x_j} \partial_{x_n} - \sum_{1 \le j,k \le n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\, \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \sum_{1 \le j \le n} \tilde{a}_j(x) \partial_{x_j} + \tilde{a}_0$$
avec $\tilde{a}_{nn}(x) + \tilde{a}_n(x) = O(x_n)$.

(15) Les coefficients $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{a}_j$ sont tous dans $C^{\mu}_{\tilde{}}(\omega_R)$, $\tilde{a}_{jk}$ est réel et $\tilde{a}_{jk} = \tilde{a}_{kj}$ pour $1 \le j,k \le n$.

(16) Il existe $C > 0$ tel que l'on ait pour $|x'| < R$, $x_n = 0$ et
$$\sum_{1 \le j,k \le n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\, \xi_j \xi_k \geqslant C |\xi'|^2 \quad \text{où } \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$
et pour tout $x \in \bar{\omega}_R$, et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$
$$x_n \sum_{1 \le j \le n} \tilde{a}_{jn}(x)\, \xi_j \xi_n + \sum_{1 \le j,k \le n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\, \xi_j \xi_k \geqslant C |\xi|^2 .$$

La proposition 1 résulte de l'inégalité a priori suivante :

Proposition 2 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant (14), (15) et (16), pour r assez petit, il existe $C > 0$ tel que l'on ait pour tout $u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\omega_{2r})$,

(17)
$$\|u\|_{2+\mu, x_n, \omega_r} \le C \left(\|\tilde{A}u\|_{1+\mu, \omega_{2r}} + \|x_n u\|_{\mu, \omega_{2r}} + \sum_{j=1}^{n-1} \|D_j u\|_{\mu, \omega_{2r}} + \|u\|_{\mu+1} \right.$$

La démonstration de la proposition 2 se fait en comparant $\tilde{A}$ et un opérateur modèle. Notons $B_o = B_o(x,D)$ défini par :
$$B_o = -\tilde{a}_{nn}(0)\left(x_n \partial_{x_n}^2 + \partial_{x_n}\right) - x_n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{jn}(0)\, \partial_{x_j} \partial_{x_n} - \sum_{1 \le j,k \le n-1} \tilde{a}_{jk}(0) \partial_{x_j} \partial_{x_k}$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{jn}(0)\, \partial_{x_j} .$$

L'hypothèse (16) implique que $\tilde{a}_{nn}(0) \neq 0$, nous effectuons un changement de variables de la forme :
$$x_n = \tilde{a}_{nn}(0)\, y_n$$
$$x_j = y_j + \frac{1}{2} \tilde{a}_{jn}(0)\, y_n \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n-1 .$$

qui transforme B_o en l'opérateur :

$$\tilde{B}_o = - \sum_{1 \leq j,k \leq n-1} \left(\tilde{a}_{jk}(0) - \frac{1}{4} y_n \tilde{a}_{jn}(0) \tilde{a}_{kn}(0) \right) \partial_{y_j} \partial_{y_k} - \partial_{y_n} - y_n \partial^2_{y_n} .$$

D'après (16), il existe un changement de variables linéaire dans $\mathbb{R}^{n-1}$ qui transforme $\tilde{B}_o$ en l'opérateur (en réutilisant les variables x_j)

$$\mathcal{L} = -x_n \partial^2_{x_n} - \partial_{x_n} - \Delta_{x'} .$$

Pour $r > 0$, nous notons $\mathcal{O}_r$ l'image de ω_r dans le changement de variables qui fait passer de B_o à $\mathcal{L}$ et, pour $F \subset \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{E}'(F)$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support compact dans F.

Admettons provisoirement l'inégalité a priori suivante :

Proposition 3 : Soit $r > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout

$$u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\mathcal{O}}_r) \cap \mathcal{E}'(\mathcal{O}_r)$$

on ait :

$$\|u\|_{2+\mu, x_n, \mathcal{O}_r} \leq C \left(\|\mathcal{L}u\|_{\mu, \mathcal{O}_r} + \|u\|_{\mu, \mathcal{O}_r} \right) . \tag{18}$$

Il en résulte immédiatement l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout $v \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\omega}_r) \cap \mathcal{E}'(\bar{\omega}_r)$, on ait :

$$\|v\|_{2+\mu, x_n, \omega_r} \leq C \left(\|B_o v\|_{\mu, \omega_r} + \|v\|_{\mu, \omega_r} \right) . \tag{19}$$

Montrons que (19) implique la proposition 2, par une méthode classique de perturbation. Soient $r \in]0, R/2[$ et $\theta \in C^\infty_o(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $B(0,2r)$ de centre 0 et de rayon $2r$ et valant 1 sur la boule $B(0,r)$; pour $u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\omega}_{2r})$ nous notons $v = \theta u$ et nous avons

$$\tilde{A} = - \tilde{a}_{nn}(x) \left(x_n \partial^2_{x_n} + \partial_{x_n} \right) - x_n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{jn}(x) \partial_{x_j} \partial_{x_n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{jn} \partial_{x_j}$$

$$- \sum_{1 \leq j,k \leq n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\tilde{a}_j(x) + \frac{1}{2} \tilde{a}_{jn}(x) \right) \partial_{x_j} + \tilde{a}_o(x)$$

où

$$R(x,D) = -(\tilde{a}_{nn}(x) - \tilde{a}_{nn}(0))(x_n\partial_{x_n}^2 + \partial_{x_n}) - x_n \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_{jn}(x) - \tilde{a}_{jn}(0))\partial_{x_j}\partial_{x_n} -$$

$$- \sum_{1 \le j,k \le n-1} (\tilde{a}_{jk}(x) - \tilde{a}_{jk}(0))\partial_{x_j}\partial_{x_k} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_{jn}(x) - \tilde{a}_{jn}(0))\partial_{x_j}$$

$$\tilde{A}(\theta u) = \theta \tilde{A} u + [\tilde{A}, \theta]u$$

$$\tilde{A}(\theta u) = B_0(\theta u) + R(\theta u) + \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_j(x) + \tfrac{1}{2}\tilde{a}_{jn}(x))\partial_{x_j}(\theta u) + \tilde{a}_0(x)\theta u$$

$$B_0(\theta u) = \theta \tilde{A} u + [\tilde{A}, \theta]u - R(\theta u) - \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_j(x) + \tfrac{1}{2}\tilde{a}_{jn}(x))\partial_{x_j}(\theta u) -$$

$$- \tilde{a}_0(x)\theta u$$

D'où il résulte d'après (19) :

$$(20) \qquad \|v\|_{2+\mu, x_n, \omega_{2r}} \le C\left(\|B_0 v\|_{\mu, \omega_{2r}} + \|v\|_{\mu, \omega_{2r}}\right)$$

$$(21) \qquad \|v\|_{2+\mu, x_n, \omega_{2r}} \le C\Big(\|\theta\tilde{A}u + [\tilde{A}, \theta]u - R(\theta u) - \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{a}_j(x) + \tfrac{1}{2}\tilde{a}_{jn}(x))\partial_{x_j}(\theta u$$

$$- \tilde{a}_0\theta u\|_{\mu, \omega_{2r}} + \|\theta u\|_{\mu, \omega_{2r}}\Big)$$

et comme les coefficients de $R(x,D)$ s'annulent en 0, nous pouvons trouver $r_0 > 0$ assez petit pour que, $0 < r \le r_0$, on ait

$$(22) \qquad C\|R(\theta u)\|_{\mu, \omega_{2r}} \le \frac{1}{2}\|\theta u\|_{2+\mu, x_n, \omega_{2r}}$$

Ceci ne suppose que la continuité des coefficients de l'opérateur $\tilde{A}$, a fortiori r_0 est déterminé par la norme $\tilde{C}^{\mu}$ des coefficients.

D'autre part l'opérateur $[\tilde{A}, \theta]$ est du premier ordre à coefficients $\tilde{C}^{\mu}(\bar{\omega}_{2r})$, et les termes du premier ordre s'annulent comme x_n sur $x_n = 0$;

transversaux

donc il existe $C_1 > 0$ tel que

$$(23)\quad C\|[\tilde{A},\theta]u\|_{\mu,\omega_{2r}} \le C_1\left(\|x_n u\|_{1+\mu,\omega_{2r}} + \|u\|_{\mu,\omega_{2r}} + \sum_{j=1}^{n-1}\|D_j u\|_{\mu,\omega_{2r}}\right)$$

et C_1 ne dépend aussi que de la norme $C^{\mu}_{\tilde{}}$ des coefficients de $\tilde{A}$. Il résulte alors de (21), (22) et (23) :

$$\|\theta u\|_{2+\mu,x_n,\omega_{2r}} \le C\|\theta\tilde{A}u\|_{\mu,\omega_{2r}} + C_1\|x_n u\|_{1+\mu,\omega_{2r}} + C_1\|u\|_{\mu,\omega_{2r}} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\|\theta u\|_{2+\mu,x_n,\omega_{2r}} + C\sum_{j=1}^{n-1}\|(\tilde{a}_j(x)+\tfrac{1}{2}\tilde{a}_{jn}(x))\partial_{x_j}(\theta u)\|_{\mu,\omega_{2r}} +$$
$$+ C_1\sum_{j=1}^{n-1}\|D_j u\|_{\mu,\omega_{2r}} + C\|\tilde{a}_0(\theta u)\|_{\mu,\omega_{2r}} + C\|\theta u\|_{\mu,\omega_{2r}}.$$

D'où il existe une constante $C_2 > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\omega}_{2r})$

$$(24)\quad \|u\|_{2+\mu,x_n,\omega_r} \le C_2\left(\|\tilde{A}u\|_{\mu,\omega_{2r}} + \|x_n u\|_{1+\mu,\omega_{2r}} + \|u\|_{\mu,\omega_{2r}} + \sum_{j=1}^{n-1}\|D_j u\|_{\mu,\omega_{2r}}\right)$$

ce qui implique donc la proposition 2. Nous avons pu constater que la constante C dans cette proposition ne dépend que de la norme $C^{\mu}_{\tilde{}}$ de tous les coefficients de $\tilde{A}$ et des constantes d'ellipticité (qui interviennent au moment du changement de variable pour la réduction au modèle).

Donc la démonstration du théorème 1 est complète si nous montrons la proposition 3, ce qui va faire l'objet du paragraphe suivant :

2) Etude du modèle dans $\mathbb{R}^n_+$

Dans ce paragraphe nous allons en particulier démontrer la proposition 3.

Notre méthode ici est différente de celle de [4] et repose essentiellement sur une désingularisation de l'opérateur

$$\mathcal{L} = -x_n^2\partial^2_{x_n} - \partial_{x_n} - \Delta_{x'}$$

dans $\mathbb{R}^n_+$ où la variable est notée (x',x_n) avec $x_n > 0$; en augmentant la dimension d'espace, nous nous ramenons à l'étude d'un opérateur uniformément elliptique. Plus précisément, nous avons :

Lemme 1 : Une fonction $u = u(x',x_n)$ est dans $\underset{\sim}{C}^{\mu}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ si et seulement si la fonction v définie par

$$v(x', z_1, z_2) = u(x', z_1^2 + z_2^2)$$

est dans $C^{\mu}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2)$.

Démonstration : La continuité de u équivaut évidemment à celle de v. Soient $x = (x',x_n)$ et $x = (\bar{x}',\bar{x}_n)$ deux points distincts de $\mathbb{R}^n_+$ et (x',z), $(\bar{x}',\bar{z})$ les points correspondants dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$(25) \qquad \frac{|u(x', x_n) - u(\bar{x}', \bar{x}_n)|}{\left(|x' - \bar{x}'| + \sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}_n}\right)^{\mu}} = \frac{|v(x', z) - v(\bar{x}', \bar{z})|}{\left(|x - \bar{x}'| + |z| - |\bar{z}|\right)^{\mu}}$$

De $||z| - |\bar{z}|| \leq |z - \bar{z}|$ résulte que : $u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}$ implique $v \in C^{\mu}$; par ailleurs, la fonction v ne dépend en fait que de x', $|z|$ et il résulte de (25) que $u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}$ dès que $v \in C^{\mu}$.

Nous avons d'autre part :

Proposition 4 : Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ et telle que $\sqrt{x_n}\, \partial_{x_n} u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Supposons : $\mathcal{L}u = f \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\mathbb{R}^n_+)$

Alors :

i) $\partial_{x_j} \partial_{x_k} u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $1 \leq j, k \leq n-1$

ii) $\partial_{x_n} x_n \partial_{x_n} u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\mathbb{R}^n_+)$

(ce qui ici équivaut à : $x_n \partial^2_{x_n} u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\mathbb{R}^n_+)$ et $\partial_{x_n} u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\mathbb{R}^n_+)$).

Démonstration : Nous notons

$$v(x', z_1, z_2) = u(x', z_1^2 + z_2^2)$$

$$g(x', z_1, z_2) = f(x', z_1^2 + z_2^2)$$

Nous avons :

$$\partial_{z_j} v = 2 z_j \partial_{x_n} u \qquad \text{pour } j = 1,2 .$$

$$\Delta_z v = 4 \partial_{x_n} x_n \partial_{x_n} u$$

donc $\mathcal{L} u = f$ dans $\mathbb{R}^n_+$ équivaut à

$$(\Delta_{x'} + \tfrac{1}{4} \Delta_z) v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \tag{26}$$

avec v,g fonctions de $z_1^2 + z_2^2$ (c'est-à-dire invariantes par rotation autour de $z_1 = z_2 = 0$).

Les hypothèses sur u impliquent que v est $L^2(\mathbb{R}^{n-1}; H^1(\mathbb{R}^2))$ et donc l'égalité (26) est valable au sens des distributions sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$; en effet la différence entre $(\Delta_{x'} + \frac{1}{4} \Delta_z) v$ calculée dans $\mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\})$ et calculée dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$ est une distribution portée par le sous-espace $\{z_1 = z_2 = 0\}$, ce qui est incompatible avec la régularité imposée sur u (et donc sur v); nous avons donc :

$$(\Delta_{x'} + \tfrac{1}{4} \Delta_z) v = g \in C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})$$

et donc $v \in C^{\mu+2}(\mathbb{R}^{n+1})$ et en particulier :

$$\partial_{x_j} \partial_{x_k} v \in C^\mu(\mathbb{R}^{n+1}) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j, k \leq n-1$$

$$\Delta_z v \in C^\mu(\mathbb{R}^{n+1}) ,$$

ce qui implique :

$$\partial_{x_j} \partial_{x_k} u \in \mathcal{C}^\mu_\sim(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{pour } 1 \leq j, k \leq n-1 \text{ et}$$

$$\partial_{x_n} x_n \partial_{x_n} u \in \mathcal{C}^\mu_\sim(\mathbb{R}^n_+)$$

D'autre part nous pouvons écrire

$$\partial_{x_n} u = \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} (\partial_{y_n} y_n \partial_{y_n}) u(x', y)\, dy$$

puisque $x_n \partial_{x_n} u(x', x_n)$ s'annule sur $x_n = 0$ (cela résulte de l'hypothèse $\sqrt{x_n}\, \partial_{x_n} u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$).

Pour terminer la démonstration de la proposition 4 il suffit de vérifier que la transformation de Hardy est continue dans les espaces $\underset{\sim}{C}^\mu$; nous avons précisément :

Lemme 2 : Soit $Aw(x', x_n) = \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} w(x', \sigma)\, d\sigma$. Alors :

$$\| Aw \|_{\underset{\sim}{C}^\mu(\mathbb{R}^n_+)} \leq \| w \|_{\underset{\sim}{C}^\mu(\mathbb{R}^n_+)} .$$

En effet, nous avons évidemment

$$\sup_{\mathbb{R}^n_+} |Aw| \leq \sup_{\mathbb{R}^n_+} |w|$$

et de plus

$$Aw(x', x_n) = \int_0^1 w(x', \sigma x_n)\, d\sigma \qquad \text{et, pour } x \neq y$$

$$\frac{|Aw(x) - Aw(y)|}{\left(|x' - y'| + |\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}|\right)^\mu} \leq \int_0^1 \frac{|u(x', \sigma x_n) - u(y', \sigma y_n)|}{\left(|x' - y'| + |\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}|\right)^\mu}$$

$$\leq \sup_{0<\sigma<1} \frac{|u(x', \sigma x_n) - u(y', \sigma y_n)|}{\left(|x' - y'| + |\sqrt{\sigma x_n} - \sqrt{\sigma y_n}|\right)^\mu}$$

La proposition 4 implique naturellement la proposition 3, car $C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\theta}_r)$ est contenu dans $\{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ \sqrt{x_n}\,\partial_{x_n} u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)\}$.

3) Estimations L^p $(1 \leq p \leq \infty)$.

On peut démontrer des inégalités a priori L^p (l'analogue du théorème 1) et des résultats de régularité et d'existence où $C^{\mu}_{\sim}$ est remplacé par L^p (l'analogue des théorèmes 2 et 3) en suivant la même méthode que ci-dessus. Il suffit de remarquer que, dans l'étude du modèle $\mathcal{L}$, la désingularisation conserve les espaces L^p; plus précisément, soient :

$$v(x', z_1, z_2) = u(x', z_1^2 + z_2^2) \ ;$$

un calcul immédiat montre que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2)} = \pi^{1/p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times]0,\infty[)} \ . \tag{27}$$

Le reste découle de la régularité des opérateurs elliptiques dans L^p pour $1 < p < \infty$.

D'autre part l'inclusion de Sobolev pour les espaces usuels implique aussi une inclusion pour les espaces construits ici sur L^p et $C^{\mu}_{\sim}$; nous avons dans $\mathbb{R}^n$ (du moins sur tout compact de $\mathbb{R}^n$) l'inclusion continue :

$$W^{2,p} \subset C^{\mu}$$

lorsque $\mu = 2 - \frac{p}{n} \in]0,1[$, où $W^{2,p} = \{u \in L^p; \ \partial^{\alpha} u \in L^p \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$.
En notant, pour $\mathcal{O}$ borné dans $\mathbb{R}^n_+$, $1 < p < \infty$,

$$W^{2,p}_{x_n}(\mathcal{O}) = \Big\{ u \in L^p(\mathcal{O}) \ ; \ \partial_{x_j}\partial_{x_k} u \in L^p(\mathcal{O}) \text{ pour } 1 \leq j,k \leq n-1 \ ,$$
$$, \ x_n \partial^2_{x_n} u \in L^p(\mathcal{O}) \text{ et } \partial_{x_n} u \in L^p(\mathcal{O}) \Big\} \ ,$$

nous avons donc aussi (en utilisant le passage précédent de $\mathbb{R}^n_+$ à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$) :

supposons $\mu = 2 - \frac{p}{n} \in]0,1[$; pour tout $\mathcal{O}$ borné dans $\mathbb{R}^n_+$, il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in W^{2,p}_{x_n}(\mathcal{O})$,

$$\|u\|_{C^{\mu}_{\sim}(\bar{\mathcal{O}})} \leq C \|u\|_{W^{2,p}(\mathcal{O})} \ . \tag{28}$$

III. EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS

Proposition 5 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients réels vérifiant les hypothèses (3), (4), (5) et (6) avec $a_o > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Alors : $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}$ et $\mathcal{A}u = 0$ impliquent $u = 0$.

Démonstration : Soit $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}$ et $\mathcal{A}u = 0$. Si $u \neq 0$, son maximum sur $\bar{\Omega}$ est atteint nécessairement en $x_o \in \partial\Omega$. Nous pouvons supposer $u(x_o) > 0$ (sinon, nous considérons $-u$). Au voisinage de x_o, nous avons en coordonnées locales (avec $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$).

$$\mathcal{L}\tilde{u} + R(x, D)\tilde{u} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(x)\partial_{x_j}\tilde{u} + \tilde{a}_o\tilde{u} = 0$$

avec $$\mathcal{L} = -x_n\partial^2_{x_n} - \partial_{x_n} - \Delta_{x'} \quad ,$$

et $R(x,D)$ est un opérateur du second ordre de la forme : $-c_{nn}(x)\left(x_n\partial^2_{x_n} + \partial_{x_n}\right) -$

$$- x_n \sum_{j=1}^{n-1} c_{jn}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_n} - \sum_{1 \le j,k \le n-1} c_{jk}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k} - \sum_{j=1}^{n-1} d_{jn}(x)\partial_{x_j}$$

avec $c_{nn}(0) = c_{jn}(0) = c_{jk}(0) = d_{jn}(0) = 0$ pour $j, k = 1, \ldots, n-1$.

Nous avons donc : $$-x_n\partial^2_{x_n}\tilde{u} - \partial_{x_n}\tilde{u} - \Delta_{x'}\tilde{u} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(x)\partial_{x_j}\tilde{u} + \tilde{a}_o\tilde{u} = g$$

avec $g(0) = 0$, $g \in \tilde{C}^{\mu}_{x_n}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$, $\tilde{u} \in C^{2+\mu}_{x_n}(\mathbb{R}^n_+)$.

Il en résulte que $x_n \partial^2_{x_n} u$ a une trace pour $x_n = 0$ et que cette trace est nulle puisque $\partial_{x_n} u$ est bornée donc

$$-\partial_{x_n} \tilde{u}(0) - \Delta_{x'} \tilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(0) \partial_{x_j} \tilde{u}(0) + \tilde{a}_o(0)\, \tilde{u}(0) = 0 \ .$$

D'autre part $\tilde{u}(0) > 0$, $\tilde{a}_o > 0$ et $\sum_{j=1}^{n-1} c_j(0)\, \partial_{x_j} \tilde{u}(0) = 0$ car $\tilde{u}$ a un maximum en 0 et comme $\Delta_{x'} \tilde{u}(0) \leqslant 0$,

l'égalité

$$\partial_{x_n} \tilde{u}(0) = -\Delta_{x'} \tilde{u}(0) + \tilde{a}_o(0)\, \tilde{u}(0)$$

implique $\partial_{x_n} \tilde{u}(0) > 0$ et donc une contradiction.

La démonstration ci-dessus suppose seulement en fait que l'on a

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \ , \quad \varphi u \in C^2(\bar{\Omega}) \quad \text{et} \quad \Lambda^2_{jk} u \in C(\bar{\Omega}) \ .$$

De l'estimation a priori du théorème 1 et du résultat d'unicité ci-dessus nous déduisons, par argument d'analyse fonctionnelle, une estimation a priori plus forte :

Proposition 6 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients réels vérifiant les hypothèses (3), (4), (5) et (6) avec $a_o > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour tout $u \in C^{2+\mu}_{\varphi}$,

$$\|u\|_{2+\mu,\varphi} \leq C \|\mathcal{A}u\|_{\mu} \ . \tag{29}$$

Démonstration : Si la proposition n'est pas vraie, il existe une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(30) \qquad j \| \mathcal{A} u_j \|_\mu \leq \| u_j \|_{2+\mu, \varphi} = 1$$

Nous pouvons trouver une sous-suite (notée encore u_j) qui converge faiblement dans $C^{2+\mu}_\varphi$ et fortement dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ vers $u \in C^{2+\mu}_\varphi$; donc $\mathcal{A} u_j$ tend vers $\mathcal{A} u$ faiblement dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ et vers 0 dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ d'après (30); donc $\mathcal{A} u = 0$ d'après la Proposition 5, et donc $\| u_j \|_\mu \longrightarrow 0$, ce qui avec (30) contredit l'inégalité a priori (10) du théorème 1.

Nous pouvons maintenant déduire de la proposition 6 un résultat d'existence (le théorème 2) en utilisant une méthode de continuité; notons d'abord

$$(31) \qquad \mathcal{A}_0 = - \operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \Lambda^2_{jk} + 1 \quad .$$

Il est démontré dans [1] par des méthodes hilbertiennes que $\mathcal{A}_0$ est un isomorphisme de $C^\infty(\bar{\Omega})$ sur $C^\infty(\bar{\Omega})$. Nous avons aussi :

Proposition 7 : L'opérateur $\mathcal{A}_0$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$.

Démonstration : Nous utilisons ici les propriétés suivantes bien connues des espaces $\underset{\sim}{C}^\mu$ (voir [3] par exemple) :

(A) pour $a \in \underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$, il existe une suite $(a^m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $a^m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\| a^m \|_\mu \leq 2 \| a \|_\mu$ et quel que soit $\nu \in [0, \mu[$, $\| a^m - a \|_\nu \to 0$.

(B) Si une suite $(a^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ et de Cauchy dans $C^0(\bar{\Omega})$, elle est de Cauchy dans tout $\underset{\sim}{C}^\nu(\bar{\Omega})$ pour $\nu \in [0, \mu[$ et sa limite a est dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$.

L'opérateur $\mathcal{A}_0$ étant linéaire continu et injectif de $C^{2+\mu}_\varphi$ dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$, il suffit de montrer qu'il est surjectif : soit $f \in \underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ d'après (A) il existe $(f^m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $f^m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\| f^m \|_\mu \leq 2 \| f \|_\mu$ et pour $\nu \in [0, \mu[$, $\| f^m - f \|_\nu \to 0$.

Pour chaque $m \in \mathbf{N}$, il existe $u^m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $\mathcal{A}_o u^m = f^m$; d'après les estimations a priori (29), $\|u^m\|_{2+\mu,\varphi}$ reste borné et (u^m) est une suite de Cauchy dans $C^{2+\nu}_\varphi$ pour $0 \leqslant \nu < \mu$; d'après (B) la limite (u^m) dans $C^{2+\nu}_\varphi$ est alors un élément $u \in C^{2+\mu}_\varphi$ et, par passage à la limite dans $\underset{\sim}{C}^\nu(\bar{\Omega})$, de $\mathcal{A}_o(u^m) = f^m$, on déduit $\mathcal{A}_o u = f$, ce qui prouve la proposition 7.

Nous considérons maintenant la famille $(\mathcal{A}_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ d'opérateurs définis par :

$$\mathcal{A}_t = (1-t)\mathcal{A}_o + t\mathcal{A} \quad .$$

Ces opérateurs sont tous des applications linéaires continues de $C^{2+\mu}_\varphi$ dans $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$ et pour $t = 0$, $\mathcal{A}_o$ est un isomorphisme. Soit $I = \{t \in [0,1]$; $\mathcal{A}_t$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $\underset{\sim}{C}^\mu\}$; d'après ce que nous venons de voir (proposition 7), $0 \in I$; évidemment I est ouvert; pour montrer que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $\underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$, il suffit de montrer que I est fermé. Nous allons, pour cela, utiliser les estimations a priori valables avec la même constante pour tous les opérateurs $\mathcal{A}_t$; soit $t_\infty \in \bar{I}$ et (t_m) une suite d'éléments de I tendant vers t_∞ ; soit $f \in \underset{\sim}{C}^\mu(\bar{\Omega})$; pour tout m, il existe $u^m \in C^{2+\mu}_\varphi$ tel que

$$\mathcal{A}_{t_m} u^m = f$$

$$\|u^m\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant c\|f\|_\mu \quad ;$$

pour tous $\nu \in [0, \mu[$, la suite (u^m) est de Cauchy dans $C^{2+\nu}_\varphi$ et sa limite est $u \in C^{2+\mu}_\varphi$; montrons que l'on a : $\mathcal{A}_{t_\infty} u = f$.

$$\mathcal{A}_{t_\infty} u = f + \mathcal{A}_{t_\infty} u - \mathcal{A}_{t_m} u + \mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)$$

$$\mathcal{A}_{t_\infty} u = f + (t_\infty - t_m)(\mathcal{A} - \mathcal{A}_o)u + \mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)$$

or $|t_\infty - t_m| \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_o)u\|_\mu \to 0$ quand $m \to \infty$ et pour tout $\nu \in [0,\mu[$,

$$\| \mathcal{A}_{t_m} (u - u^m) \|_{\nu} \leq C \| u - u^m \|_{2+\nu, \varphi}$$

$$\| \mathcal{A}_{t_m} (u - u^m) \|_{\nu} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } m \to \infty$$

Ceci termine la démonstration du théorème 2.

Pour démontrer le théorème 3, nous ne pouvons pas utiliser un principe de maximum pour démontrer l'unicité, mais le fait que si $\mathrm{Rea}_o > C$ et les coefficients a_{jk}, $b_{\alpha,\beta}$ sont dans $C^1(\bar{\Omega})$, alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$. On en déduit que $\mathcal{A}$ est injectif de $C^{2+\mu}_{\varphi}$ dans $\tilde{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$. Tout le reste de la démonstration est identique à celle du théorème 2.

IV. REMARQUE ET APPLICATION

1) Dans les résultats ci-dessus nous avons considéré un second membre $f \in C^{\mu}(\Omega)$ avec $0 < \mu \leq 1$. Si cette donnée f et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont plus réguliers, nous obtenons aussi plus de régularité pour la solution donnée par le théorème 2 dont nous avons le

Corollaire 1 : Soit $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (3), (4), (5) et (6) avec μ remplacé par $\ell + \mu$ et $\ell \in \mathbf{N}$. Supposons les coefficients de $\mathcal{A}$ réels et $a_o > 0$ sur $\bar{\Omega}$; alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\{u \in \tilde{C}^{\ell+1+\mu}, \ \varphi u \in \tilde{C}^{\ell+2+\mu}(\Omega)$ et $\Lambda^2_{jk} u \in \tilde{C}^{\ell+\mu}(\bar{\Omega})$ pour $1 \leq j < k \leq n\}$ sur $\tilde{C}^{\mu+\ell}(\bar{\Omega})$.

Un tel résultat s'obtient par récurrence sur ℓ, en localisant et gagnant d'abord les dérivations tangentielles au bord, puis les dérivées normales en utilisant une inégalité de Hardy.

2) Problème non linéaire : Les estimations obtenues ci-dessus permettent de prouver des résultats d'existence dans des espaces höldériens pour des problèmes quasi-linéaires elliptiques dégénérés. Considérons par exemple l'équation (avec f donnée dans $C^{\mu}(\bar{\Omega})$) :

$$(32) \qquad -\mathrm{div}\, \varphi \, \mathrm{grad}\, u + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \Lambda^2_{jk} u + u^3 = f$$

nous lui associons, pour $\tau \in]0,1[$,

$$(33) \qquad -\operatorname{div}\varphi \operatorname{grad} v + \sum_{1\leq j<k\leq n} \Lambda^2_{jk} v + (1-\tau)v = \tau(f - v^3)$$

et en multipliant les deux membres de (33) par v^{2k+1} pour $k \in \mathbf{N}$ et en intégrant sur Ω, nous obtenons pour v solution de (33) :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq (\|f\|_{L^{p/3}(\Omega)})^{1/3} \qquad \text{pour tout } p \geq 4.$$

Il en résulte, d'après les estimations L^p $(1 < p < \infty)$ (paragraphe II.3)) que les solutions de (33) restent dans un borné de l'espace $\{v \in L^p(\Omega),\ \varphi D^2_j u \in L^p(\Omega)$ $D_j u \in L^p(\Omega)$ et $\Lambda^2_{jk} u \in L^p(\Omega)$ pour $1 \leq j < k \leq n\}$ pour tout $p \in]1,\infty[$, et donc dans un borné de $\underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$ grâce à (28) et enfin, grâce au théorème 1, dans un borné de $C^{2+\mu}_{\varphi}$. Cela implique l'existence d'une solution de (32). Nous utiliserons pour cela une version du théorème de Leray et Schauder qui peut s'énoncer comme suit :

[Soient X un espace de Banach réel et T une application compacte de X dans X. Si l'ensemble $\{v \in X;\ \exists\, \tau \in]0,1[$ avec $v = \tau Tv\}$ est borné, alors il existe au moins un $v \in X$ tel que $v = Tv$.

Ici nous prenons $X = \underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$ et Tu est la solution W du problème :

$$-\operatorname{div}\varphi \operatorname{grad} w + \sum_{1\leq j<k\leq n} \Lambda^2_{jk} w + w = f - u^3 + u \ .$$

Nous vérifions immédiatement que T est compacte dans X (en fait, pour $u \in \underset{\sim}{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$, w est dans $C^{2+\mu}_{\varphi}$) et que la solution v de $v = Tv$ est une solution du problème non linéaire considéré. Par ailleurs l'unicité ici est immédiate ; si u et $u + w$ sont deux solutions de (32), nous avons :

$$-\operatorname{div}\varphi \operatorname{grad} w + \sum_{1\leq j<k\leq n} \Lambda^2_{jk} w + (u+w)^3 - u^3 = 0$$

d'où

$$\int_\Omega \varphi |\operatorname{grad} w|^2 dx + \sum_{1\leq j<k\leq n} \int_\Omega (\Lambda_{jk} w)^2 dx + \int_\Omega w^2(3u^2 + 3uw + w^2) =$$

ce qui implique $w = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés; Applications . Journal of Functional Analysis, vol. 9 n° 2 (1972).

[2] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rat. Mech. Anal. 34-5 (1969) 362-379.

[3] D. Gilbarg, N. S. Trudingra : Elliptic partial differential equations of second order. Springer.

[4] C. Goulaouic, N. Shimakura : Régularité höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés. Coll. S. M. F. de Saint-Jean-de-Monts, 1981.

***